Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **I**, 6.

RECHERCHES

SUR LES

POLYNOMES D'HERMITE

PAR

NIELS NIELSEN

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1918

UDGIVET PAA
CARLSBERGFONDETS
BEKOSTNING

INTRODUCTION

L'illustre Hermite[1] a attiré l'attention des géomètres sur une classe de polynomes très remarquables, définis à l'aide des dérivées d'ordre supérieur de la fonction $e^{-\frac{x^2}{4a}}$, où a est une constante positive, dont la valeur ne joue aucun rôle essentiel pour la nature des polynomes en question.

Soit généralement

$$D_x^n e^{-\frac{x^2}{4a}} = \frac{(-1)^n n!}{(2a)^n} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a), \quad a > 0, \tag{1}$$

Hermite a étudié le cas particulier $a = \frac{1}{2}$ et démontré les propriétés suivantes très remarquables des polynomes $H_n(x, a)$.

En premier lieu, soit n un positif entier quelconque, l'équation algébrique du degré n par rapport à x:

$$H_n(x, a) = 0 \tag{2}$$

a toutes ses racines réelles et inégales, ce qui est une conséquence immédiate de la formule (1); cependant Hermite indique le résultat beaucoup plus intéressant, que la suite de Sturm et la suite de Newton qui correspondent à l'équation algébrique (2) deviennent identiques.

C'est précisément cette propriété des $H_n(x, a)$ qui s'exprime d'un autre point de vue dans le résultat intéressant que nous avons trouvé dans le paragraphe 6 du Mémoire présent.

En second lieu, Hermite a démontré les deux formules intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a) H_p(x, a)\, dx = 0, \quad n \neq p, \tag{3}$$

[1] Comptes rendus, t. 58, p. 94—100; 1864.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} \left(H_n(x, a)\right)^2 dx = \frac{(2a)^n \sqrt{4a\pi}}{n!}. \tag{4}$$

Supposons maintenant convergent le développement en série de polynomes d'HERMITE

$$f(x) = A_0 H_0(x, a) + A_1 H_1(x, a) + A_2 H_2(x, a) + \ldots \tag{5}$$

et supposons ensuite qu'il soit intégrable terme à terme de $x = -\infty$ à $x = \infty$, après être multiplié par $e^{-\frac{x^2}{4a}}$, il résulte

$$\frac{(2a)^n \sqrt{4a\pi}}{n!} \cdot A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a) f(x) \, dx, \tag{6}$$

détermination qui est analogue à celle connue pour les coefficients d'une série de FOURIER.

C'est-à-dire que les fonctions

$$e^{-\frac{x^2}{8a}} H_n(x, a) \tag{7}$$

forment, conformément à la terminologie de la théorie des équations intégrales, un système de fonctions orthogonales.

Cette propriété des polynomes d'HERMITE est très intéressante, parce que, abstraction faite des fonctions trigonométriques $\cos nx$ et $\sin nx$, on a connu antérieurement, que je sache, seulement trois systèmes de fonctions orthogonales, savoir:

1) Les polynomes de LEGENDRE[1] ou les fonctions sphériques de première espèce $P^n(x)$.

2) Les fonctions cylindriques du paramètre zéro $J^0(a_n x)$, où les a_n sont les zéro positifs de la transcendante entière $J^0(x)$.[2]

3) Les polynomes $\varphi_n(x)$ d'ABEL[3], définis d'après HALPHEN[4] par la formule

$$\frac{e^x}{n!} D_x^n (x^n e^{-x}) = (-1)^n \varphi_n(x); \tag{8}$$

dans ce cas les fonctions

[1] Histoire de l'Académie des Sciences (Paris) 1782, p. 163.
[2] FOURIER: Théorie analytique de la chaleur, chap. VI; Paris 1822.
[3] Œuvres, t. II, p. 284.
[4] Comptes rendus, t. 94, p. 629—631; 1882.

$$e^{-\frac{x}{2}}\varphi_n(x) \tag{9}$$

forment un système de fonctions orthogonales.

Quinze ans après la publication de la note d'HERMITE, feu M. GRAM [1], dans ses belles recherches sur les développements en séries obtenus à l'aide de la méthode des moindres carrés, a retrouvé les deux systèmes de fonctions orthogonales (8) et (9).

En même temps LAGUERRE [2] et M. APPELL [3] ont touché les polynomes d'HERMITE sans pénétrer assez profondément dans la nature de ces fonctions intéressantes, tandis qu'HALPHEN [4] a essayé de donner une théorie des séries de la forme (5), théorie qui ne me semble pas rigoureuse.

Plus tard deux géomètres anglais, MM. WHITTAKER [5] et CURZON [6], ont étudié les fonctions orthogonales (7) sans trouver des propriétés essentielles des polynomes d'HERMITE.

Dans sa Thèse du doctorat, Mlle WERA MYLLER-LEBEDEFF [7] a étudié la série (5), au point de vue de la théorie des équations intégrales, et trouvé une condition suffisante qui doit être remplie par la fonction $f(x)$, de sorte que la série en question soit convergente sur l'axe réelle de $x = -\infty$ à $x = +\infty$.

Or, la nature analytique des séries en question étant parfaitement inconnue, la valeur de ce résultat doit être désignée comme assez douteuse, à cause de la possibilité très

[1] Qm Rækkeudviklinger, bestemte ved de mindste Kvadraters Methode (Thèse du doctorat), Copenhague 1879; Journal de Crelle, t. 94, p. 41—73; 1883. (Voir pp. 54—55, 71—73.)

[2] Bulletin de la Société mathématique de France, t. 7, p, 12—16; 1879. Œuvres, t. I, p. 415—419.

[3] Annales de l'École Normale (2) t. 9, p. 119—145; 1880. (Voir p. 124—129.)

[4] Darboux Bulletin (2) t. 5, p. 462—488; 1881.

[5] London Mathematical Society, Proceedings, t. 35, p. 417—427; 1903.

[6] Loc. cit. (2) t. 12, p. 236—259; 1913.

[7] Mathematische Annalen, t. 64, p. 388—416; 1907.

voisine que ces séries sont de la même nature que celles étudiées dans les paragraphes 3, 4 et 5 du présent Mémoire, savoir que les séries sont convergentes dans tout le plan des x, pourvu qu'elles soient convergentes pour une valeur quelconque de la variable x.

Il saute aux yeux que la théorie des équations intégrales ne donne aucun moyen pour répondre à la question susdite parce qu'elle est bornée à l'étude de la série en question pour des valeurs réelles de la variable et à la détermination des coefficients à l'aide d'une expression intégrale analogue à (6).

Cela posé, on se rappelle involontairement la remarque de M. KNESER; l'éminent géomètre allemand dit, en effet:[1]

»Man wird also sagen dürfen, dass zwar für die Lehre von der Darstellung willkürlicher Funktionen die Integralgleichungen ein mächtiges Hilfsmittel bieten, dass aber die tiefsten Geheimnisse nicht aus den geltenden Integralgleichungen, sondern nach wie vor aus den Differentialgleichungen geschöpft werden müssen.«

J'ignore si les séries de polynomes d'HERMITE possèdent la propriété susdite parce que je n'ai pas réussi à pénétrer les difficultés considérables, cependant je me réserve de revenir à cette question dans un second Mémoire.

Quant aux résultats obtenus dans le Mémoire présent, nous nous bornerons à indiquer seulement qu'il existe une certaine analogie entre les polynomes d'HERMITE et les fonctions sphériques $P^n(x)$.

En effet, le polynome $H_n(x, a)$ est intégrale particulière d'une équation différentielle homogène et linéaire du second ordre, équation qui est satisfaite aussi par une fonction transcendante $h_n(x, a)$ qui se présente sous la forme

$$(10) \quad h_n(x, a) = H_n(x, a) \int_0^x e^{\frac{x^2}{4a}} dx - \frac{2a}{n!} G_{n-1}(x, a)\, e^{\frac{x^2}{4a}}, \quad n \geq 1,$$

[1] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 37, p. 197; 1914.

où $G_m(x, a)$ est un polynome entier du degré m par rapport à x.

Nous désignons comme fonctions d'HERMITE de seconde espèce les trancendantes entières $h_n(x, a)$, et il saute aux yeux que la formule (10) est très analogue à la formule de GAUSS pour la fonction sphérique générale de seconde espèce.

D'un autre côté il existe une différence essentielle entre les polynomes d'HERMITE et les fonctions sphériques.

En effet, cherchons un développement de la forme

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n(y, a) H_n(x, a) \tag{11}$$

analogue à celle de la théorie des fonctions sphériques, savoir

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} Q^n(y) P^n(x), \tag{12}$$

les coefficients $K_n(y, a)$ se présentent sous forme de séries divergentes; néanmoins l'intégrale qui correspond à (6) existe et admet comme série asymptotique la série divergente susdite.

Remarquons encore en passant que, dans les dernières années, plusieurs géomètres, notamment l'eminent astronome suédois M. CHARLIER, développent une fonction quelconque en série de la forme (5), séries dont les premiers termes donnent une approximation pratique de $f(x)$.

Il me semble très remarquable que ces séries, d'une nature si ardue et inaccessible, possèdent une telle propriété pratique, cependant j'espère revenir à cette question dans un second Mémoire sur les polynomes d'HERMITE.

Copenhague, le 19 octobre 1917.

NIELS NIELSEN.

CHAPITRE I.

Sur les suites harmoniques.

§ 1. Définition et propriétés fondamentales.

Dans ce qui suit nous avons à étudier une suite infinie de polynomes entiers

$$(1) \qquad f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots$$

assujettis à satisfaire aux deux conditions suivantes:

1° $f_n(x)$ est toujours, quel que soit l'indice n, du degré n par rapport à x.

2° Soit $n \geqq 1$, nous aurons constamment

$$(2) \qquad f_n'(x) = f_{n-1}(x).$$

Cela posé, je dis qu'il existe une suite infinie

$$(3) \qquad a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \qquad a_0 \neq 0,$$

telle que nous aurons, pour une valeur quelconque de l'indice n,

$$(4) \qquad f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s x^{n-s}}{(n-s)!}.$$

En effet, le polynome $f_n(x)$ se présente toujours dans la forme

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_{n,s}\, x^{n-s}}{(n-s)!},$$

ce qui donnera, en vertu de (2),

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{a_{n,s}\, x^{n-s-1}}{(n-s-1)!},$$

d'où immédiatement

$$a_{n,s} = a_{n-1,s}, \quad 0 \leqq s \leqq n-1.$$

Soit ensuite s un indice quelconque, nous aurons par conséquent

$$a_{n,s} = a_{n-1,s} = a_s, \quad n \geqq s,$$

ce qui donnera précisément l'expression générale (4).

Inversement, il est évident que les polynomes définis par l'expression générale (4) satisfont aux deux conditions susdites.

Dans ce qui suit nous disons pour abréger que la suite (1) est une suite harmonique, dont la base est la suite (3), ce que nous désignons par le symbole $[a_n, f_n(x)]$. De plus, nous désignons simplement par $[a_n]$ la base (3). Ces définitions adoptées, nous avons tout d'abord à développer quelques propriétés fondamentales des suites harmoniques, propriétés qui nous sont indispensables dans nos recherches suivantes.

I. Soient $[a_n, f_n(x)]$ et $[b_n, \varphi_n(x)]$ deux suites harmoniques quelconques, il existe une suite ordinaire

$$(5) \qquad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots,$$

de sorte que nous aurons pour une valeur quelconque de n

$$(6) \quad \varphi_n(x) = \alpha_0 f_n(x) + \alpha_1 f_{n-1}(x) + \ldots + \alpha_{n-1} f_1(x) + \alpha_n f_0(x).$$

En effet, $f_n(x)$ et $\varphi_n(x)$ étant toujours précisément du dégré n, il existe une identité de la forme

$$(7) \qquad \varphi_n(x) = \beta_{n,0} f_n(x) + \beta_{n,1} f_{n-1}(x) + \ldots + \beta_{n,n} f_n(x),$$

où les $\beta_{n,s}$ sont des constantes. Introduisons ensuite, dans (7), les expressions obtenues pour $\varphi_n(x)$ et les $f_{n-s}(x)$, nous aurons en égalant les coefficients des mêmes puissances de x qui figurent aux deux membres de (7)

$$(8) \qquad b_s = \beta_{n,0} a_s + \beta_{n,1} a_{s-1} + \ldots + \beta_{n,s} a_0,$$

où il faut supposer $0 \leqq s \leqq n$.

Cela posé, désignons par s un nombre fixe quelconque, la formule (8) est valable pour $n \geqq s$; c'est-à-dire que nous aurons successivement, en introduisant dans (8)

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s-1$$

à la place de s

$$\beta_{n,s} = \beta_{s,s} = \alpha_s, \quad n \geqq s.$$

II. Soient $[a_n, f_n(x)]$ et $[b_n, \varphi_n(x)]$ deux suites harmoniques quelconques, l'expression

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s f_{n-s}(x)\,\varphi_s(x) \tag{9}$$

a toujours une valeur constante, tandis que les polynomes

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} f_{n-s}(x)\,\varphi_s(x) \tag{10}$$

forment une nouvelle suite harmonique.

Étudions tout d'abord l'expression A_n, nous aurons en différentiant par rapport à x

$$A_n' = \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^s f_{n-s-1}(x)\,\varphi(x) + \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^s f_{n-s}(x)\,\varphi_{s-1}(x) = 0;$$

c'est-à-dire que A_n a une valeur constante. Soit $x = 0$, il résulte

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s a_{n-s} b_s. \tag{11}$$

Quant au polynome $\Phi_n(x)$ défini par l'expression (10), nous aurons de même

$$\Phi_n'(x) = \Phi_{n-1}(x), \quad n \geqq 1, \tag{12}$$

de sorte que les $\Phi_n(x)$ forment une suite harmonique; soit $[\alpha_n]$ la base correspondante, il résulte, en vertu de (10),

$$\alpha_n = \Phi_n(0) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} a_{n-s} b_s. \tag{13}$$

Comme une conséquence immédiate de la définition des suites harmoniques, nous aurons la proposition suivante:

III. Soit $[a_n, f_n(x)]$ une suite harmonique quelconque, la formule de Taylor se présente sous la forme

$$f_n(x+h) = f_n(x) + \frac{h}{1!} f_{n-1}(x) + \frac{h^2}{2!} f_{n-2}(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f_0(x). \tag{14}$$

Il est bien connu que M. Appell[1] a étudié, le premier, d'un point de vue systématique, les suites harmoniques.

En effet, soit (1) une suite harmonique conformément à notre définition, puis supposons pour tous les n

$$F_n(x) = n!\, f_n(x),$$

l'illustre géomètre français étudie la suite

$$F_0(x),\ F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots,\ F_n(x),\ \ldots,$$

dont les éléments satisfont à la condition générale

$$F_n'(x) = nF_{n-1}(x).$$

Or, mes recherches sur les fonctions de Bernoulli montrent clairement l'avantage de la modification de notre définition des suites harmoniques.

§ 2. Sur une formule de M. Appel.

Supposons maintenant que la base $[a_n]$ de la suite harmonique $[a_n, f_n(x)]$ soit telle que la série de puissances

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_n\alpha^n + \ldots \tag{1}$$

ait le rayon de convergence ρ, puis multiplions (1) par la série de puissances toujours convergente

$$e^{\alpha x} = 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha^2 x^2}{2!} + \ldots + \frac{\alpha^n x^n}{n!} + \ldots, \tag{2}$$

il résulte

$$\varphi(\alpha) e^{\alpha x} = f_0(x) + f_1(x)\alpha + f_2(x)\alpha^2 + \ldots + f_n(x)\alpha^n + \ldots, \tag{3}$$

et il est évident que les deux séries de puissances qui figurent aux seconds membres de (1) et (3) sont en même temps convergentes ou non, quelle que soit la variable x.

[1] Annales de l'École Normale (2) t. IX, p 119—145; 1880.

La formule (3) est due à M. APPELL.[1]

Les deux séries de puissances (1) et (3) ayant le même rayon de convergence, nous aurons par conséquent

$$(4) \qquad \limsup_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \limsup_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{f_n(x)}\right| = \frac{1}{\rho},$$

quelle que soit la variable x.

Soit tout d'abord ρ un nombre fini plus grand que zéro, nous avons à étudier la série infinie

$$(5) \quad A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x) + \ldots,$$

où les coefficients A_n sont indépendants de x.

A cette effet, posons

$$(6) \qquad \limsup_{n=\infty} \left|\sqrt[n]{A_n}\right| = \sigma,$$

nous aurons le théorème suivant:

I. Soit $\sigma < \rho$, la série (5) est absolument convergente pour une valeur quelconque de la variable x.

En effet, posons

$$\sigma = \rho - 4\delta,$$

où δ est une quantité positive, il existe un positif entier N_1, tel que nous aurons constamment

$$\left|\sqrt[n]{A_n}\right| \leqq \rho - 2\delta, \quad n \geqq N_1.$$

De plus, il existe un autre positif entier N_2, tel que nous aurons constamment

$$\left|\sqrt[n]{f_n(x)}\right| \leqq \frac{1}{\rho - \delta}, \quad n \geqq N_2,$$

ce qui donnera

$$\left|\sqrt[n]{A_n f_n(x)}\right| \leqq \frac{\rho - 2\delta}{\rho - \delta}, \quad n \geqq N,$$

où N est le plus grand des nombres N_1 et N_2; c'est-à-dire que la série (5) est absolument convergente, quelle que soit la variable x.

[1] loc. cit. p. 120.

Soit, au contraire, $\sigma > \rho$, nous verrons de même que la série (5) n'est pas convergente, abstraction faite de certaines valeurs spéciales de x peut-être.

Enfin, soit $\sigma = \rho$, la nature de la série (5) est très différente, nous le verrons clairement dans les paragraphes suivants.

Étudions maintenant le cas extrême $\rho = \infty$, il est évident que la série (5) est absolument convergente pour une valeur quelconque de x, pourvu que σ ait une valeur finie, tandis que $\sigma = \infty$ exige des recherches ultérieures.

Quant au second cas extrême $\rho = 0$, les deux séries de puissances (1) et (3) ne sont convergentes que pour $\alpha = 0$; néanmoins la suite harmonique correspondante $[a_n, f_n(x)]$ existe, et la convergence de la série (5) exige nécessairement $\sigma = 0$.

§ 3. Étude d'un cas spécial.

Dans ce qui suit nous supposons que le rayon de convergence ρ soit un nombre positif fini, et nous avons à étudier le cas spécial, où les éléments a_n de la base $[a_n]$ satisfont à la condition

$$\lim_{n=\infty} (\rho^n a_n) = 1. \tag{1}$$

Posons ensuite pour tous le n

$$a_n = \frac{1}{\rho^n}(1+\delta_n)\,, \tag{2}$$

nous supposons de plus que la série infinie $\Sigma\delta_n$ soit absolument convergente et que nous ayons constamment $|\delta_{n+1}| \leq |\delta_n|$.

Cela posé, la définition de $f_n(x)$ donnera immédiatement

$$\rho^n f_n(x) = (1+\delta_0)\frac{(\rho x)^n}{n!} + (1+\delta_1)\frac{(\rho x)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + (1+\delta_n)\,,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\rho^n f_n(x) = e^{\rho x} - \sum_{s=n+1}^{n=\infty} \frac{(\rho x)^s}{s!} + \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(\rho x)^s}{s!} \delta_{n-s}.$$

Posons maintenant pour abréger

$$\rho^n f_n(x) = e^{\rho x} + \delta_n(x)\,, \tag{3}$$

nous aurons par conséquent

$$|\delta_n(x)| \leqq \sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{|\rho x|^s}{s!} + \sum_{s=0}^{s=n} \frac{|\rho x|^s}{s!} \cdot |\delta_{n-s}|. \tag{4}$$

Quant à la première des sommes qui figurent au second membre de (4), supposons

$$n+1 > |\rho x|\,,$$

il résulte

$$\sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{|\rho x|^s}{s!} < \frac{|\rho x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \frac{|\rho x|}{n+1} + \frac{|\rho x|^2}{(n+1)^2} + \ldots\right),$$

ce qui donnera immédiatement

$$\sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{|\rho x|^s}{s!} < \frac{|\rho x|^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n+1-|\rho x|}. \tag{5}$$

Supposons particulièrement

$$|x| \leqq K\,, \tag{6}$$

où K est un nombre positif arbitrairement grand, nous aurons de même

$$\sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{|\rho x|^s}{s!} < \frac{(\rho K)^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1}{n+1-\rho K}\,, \tag{7}$$

où il faut supposer naturellement

$$n+1 > \rho K.$$

Quant à la seconde des sommes qui figurent au second membre de (4), nous posons comme ordinairement

$$m = \frac{n}{2}\,, \quad m = \frac{n-1}{2}\,,$$

selon que n est pair ou impair; de plus, désignons par g la limite supérieure des $|\delta_s|$, nous aurons

$$\sum_{s=0}^{s=n} \frac{|\rho x|^s}{s!} \cdot |\delta_{n-s}| < |\delta_{n-m}| \cdot e^{\rho|x|} + g \cdot \sum_{s=m+1}^{s=n} \frac{|\rho x|^s}{s!}.$$

Supposons ensuite

$$m+1 > |\rho x|,$$

nous aurons par conséquent

$$(8) \quad \sum_{s=0}^{s=n} \frac{|\rho x|^s}{s!} \cdot |\delta_{n-s}| < |\delta_{n-m}| \cdot e^{\rho|x|} + \frac{g|\rho x|^{m+1}}{m!} \cdot \frac{1}{m+1-|\rho x|},$$

tandis que la condition (6) donnera

$$(9) \quad \sum_{s=0}^{s=n} \frac{|\rho x|^s}{s!} \cdot |\delta_{n-s}| < |\delta_{n-m}| \cdot e^{\rho K} + \frac{g(\rho K)^{m+1}}{m!} \cdot \frac{1}{m+1-\rho K},$$

où il faut supposer naturellement

$$m+1 > \rho K.$$

Cela posé, nous aurons, en vertu de (4), (5) et (8)

$$(10) \quad |\delta_n(x)| < |\delta_{n-m}| \cdot e^{\rho|x|} + \frac{|\rho x|^{m+1}}{m!} \cdot \frac{g+1}{m+1-|\rho x|},$$

tandis que la condition (6) donnera de même

$$(11) \quad |\delta_n(x)| < |\delta_{n-m}|\, e^{\rho K} + \frac{(\rho K)^{m+1}}{m!} \cdot \frac{g+1}{m+1-\rho K};$$

c'est-à-dire que la série infinie $\Sigma\delta_n(x)$ est absolument convergente, quelle que soit la variable x, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leq K$.

Ces résultats obtenus, il est facile de démontrer le théorème suivant:

I. La condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série infinie

$$(12) \quad F(x) = A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x) \ldots$$

est que la série à termes constantes

$$(13) \quad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{\rho^n}$$

soit convergente. Dans ce cas la série en question est convergente, quelle que soit la variable x, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$; c'est-à-dire que $F(x)$ est une transcendante entière.

En effet, supposons tout d'abord convergente la série (13), nous aurons, en vertu de (3),

$$(14) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n f_n(x) = e^{\rho x} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{\rho^n} + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n}{\rho^n} \delta_n(x).$$

Or, nous aurons, en vertu de la convergence de (13),

$$(15) \qquad \lim \frac{A_n}{\rho^n} = 0 \; ;$$

il est évident que les deux séries qui figurent au second membre de (14) sont convergentes, quelle que soit la variable x, et uniformément convergentes, pourvu que $|x| \leqq K$; c'est-à-dire que la série qui figure au premier membre de (14) a les mêmes propriétés.

Inversement, supposons convergente la série (12), nous trouvons nécessairement la condition (15), parce que

$$\lim_{n=\infty} \left(\rho^n f_n(x)\right) = e^{\rho x} \neq 0 \; ;$$

c'est-à-dire que la seconde série qui figure au second membre (14) est convergente quelle que soit x, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$, ce qui exige la convergence de la série (13).

Cela posé, il est evident que le théorème précédent donnera immédiatement cet autre:

II. Supposons qu'il existe une valeur quelconque x_1 telle que la série (12) est convergente pour $x = x_1$, cette même série est convergente, quelle que soit la variable x et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$; c'est-à-dire que $F(x)$ est une transcendante entière.

Prenons maintenant pour point de départ la série de puissances toujours convergente, obtenue pour $F(x)$, savoir

$$(16) \qquad F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

un théorème très connu de WEIERSTRASS donnera

$$c_n = \frac{A_n a_0}{n!} + \frac{A_{n+1} a_1}{n!} + \frac{A_{n+2} a_2}{n!} + \dots \tag{17}$$

Soit par exemple, quel que soit n,

$$a_n = 1,$$

savoir

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + \frac{x}{1!} + 1, \tag{18}$$

nous aurons

$$\rho = 1, \quad \delta_n = 0, \tag{19}$$

et la série de puissances de M. Appell deviendra

$$\frac{e^{\alpha x}}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{n=\infty} f_n(x)\,\alpha^n, \qquad |\alpha| < 1, \tag{20}$$

ou, ce qui est la même chose

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (\alpha^n - \alpha^{n+1}) f_n(x), \qquad |\alpha| < 1, \tag{21}$$

de sorte que nous aurons de même

$$\cos \alpha x = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \left(\alpha^{2n} f_{2n}(x) + \alpha^{2n+2} f_{2n+2}(x)\right), \tag{22}$$

$$\sin \alpha x = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \left(f_{2n+1}(x) - f_{2n}(x)\right) \alpha^{2n+1}, \tag{23}$$

où il faut supposer également $|\alpha| < 1$.

Dans ce cas la formule (17) donnera

$$n!\,c_n = A_n + A_{n+1} + A_{n+2} + \dots, \tag{24}$$

savoir

$$A_n = n!\,c_n - (n+1)!\,c_{n+1}; \tag{25}$$

c'est-à-dire que le théorème I donnera ici:

III. La condition nécessaire et suffisante qui doit être remplie par la transcendante entière (16) développable en série de la forme

$$F(x) = A_0 f_0(x) + A_1 f_1(x) + \dots + A_n f_n(x) + \dots \tag{26}$$

est que

$$n!\, c_n \tag{27}$$

ait une valeur limite finie, le cas spécial

$$c_n = \frac{k}{n!}, \tag{28}$$

où k est une constante, exclu.

Soit par exemple

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{1}{\nu+n}, \tag{29}$$

nous aurons, en vertu de (25),

$$F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{f_n(x)}{(\nu+n)(\nu+n+1)}. \tag{30}$$

Remarquons en passant que le polynome $f_n(x)$ est intégrale particulière de l'équation différentielle homogène et linéaire du second ordre

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0, \tag{31}$$

qui admet, comme autre intégrale particulière, la fonction e^x.

§ 4. Application sur les fonctions de Bernoulli.

Comme seconde application nous avons à étudier la suite harmonique formée des fonctions de BERNOULLI

$$\left\{\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x + \frac{1}{2} \\ B_n(x) &= \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{s=1}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!}, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

où les B_s sont les nombres de BERNOULLI, suite harmonique qui est définie par les équations aux différences finies

$$B_n(x) - B_n(x-1) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n \geqq 1, \tag{2}$$

de sorte que la formule (14) du paragraphe 1 donnera

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{B_n(x)}{1!} - \frac{B_{n-1}(x)}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n B_0(x)}{(n+1)!}. \tag{3}$$

Dans ce cas la série de puissances de M. APPELL deviendra

$$\frac{a\,e^{ax}}{1-e^{-a}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n(x)\,a^n, \tag{4}$$

de sorte que nous aurons

$$\rho = 2\pi. \tag{5}$$

Or, la formule d'EULER

$$\frac{(2\pi)^{2n} B_n}{(2n)!\,2} = \frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots$$

nous conduira à poser

$$\frac{(2\pi)^{2n} B_n}{(2n)!\,2} = 1 + \delta_n, \tag{6}$$

ce qui donnera

$$\delta_n = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots,$$

et nous trouvons évidemment

$$\delta_n < \frac{2}{2^{2n}} + \frac{4}{4^{2n}} + \frac{8}{8^{2n}} + \frac{16}{16^{2n}} + \ldots,$$

savoir

$$\delta_n < \frac{1}{2^{2n-1}-1} \leqq \frac{1}{2^{2n-2}}, \tag{7}$$

c'est-à-dire que la série infinie $\Sigma\delta_n$ à termes positifs est convergente, et que nous aurons de plus $\delta_{n+1} < \delta_n$.

Cela posé, étudions tout d'abord la fonction $B_{2n}(x)$; nous aurons, en vertu de (6),

$$\frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2} \cdot B_{2n}(x) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (2\pi x)^{2s}}{(2s)!}(1+\delta_{n-s}) - \frac{(-1)^n \pi}{2} \cdot \frac{(2\pi x)^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{(2\pi x)^{2n}}{(2n)!},$$

ce qui nous conduira à poser généralement

$$\frac{(-1)^{n-1}(2\pi)^{2n}}{2} \cdot B_{2n}(x) = \cos 2\pi x + \delta_{2n}(x), \tag{8}$$

où il faut admettre

$$\delta_{2n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (2\pi x)^{2s}}{(2s)!} \delta_{n-s} - \frac{(-1)^n \pi (2\pi x)^{2n-1}}{(2n-1)!\,2} - \frac{(-1)^n (2\pi x)^{2n}}{(2n)!\,2};$$

supposons ensuite

$$2|x| < n,$$

nous aurons par conséquent

$$|\delta_{2n}(x)| < \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{|2\pi x|^{2s}}{(2s)!} \delta_{n-s} + \frac{\pi \cdot |2\pi x|^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{|2\pi x|^{2n} \cdot e^{|2\pi x|}}{(2n)!}.$$

Ces réductions faites, les définitions de m et g appliquées dans la formule (8) du paragraphe 3 donnent ici l'inégalité

$$(9) \quad |\delta_{2n}(x)| < \delta_{n-m} \cdot e^{|2\pi x|} + \frac{g + e^{|2\pi x|}}{2m - |2\pi x|} \cdot \frac{|2\pi x|^{2m}}{(2m-1)!} + \frac{\pi \cdot |2\pi x|^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

soit ensuite

$$(10) \qquad |x| \leqq K,$$

nous aurons de même

$$(11) \quad |\delta_{2n}(x)| < \delta_{n-m} \cdot e^{2\pi K} + \frac{g + e^{2\pi K}}{2m - 2\pi K} \cdot \frac{(2\pi K)^{2m}}{(2m-1)!} + \frac{\pi (2\pi K)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Quant aux fonctions $B_{2n+1}(x)$, posons

$$(12) \quad \frac{(-1)^{n-1} (2\pi)^{2n+1}}{2} \cdot B_{2n+1}(x) = \sin 2\pi x + \delta_{2n+1}(x),$$

nous aurons

$$(13) \quad \delta_{2n+1}(x) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (2\pi x)^{2s+1}}{(2s+1)!} \delta_{n-s} - \frac{(-1)^n \pi (2\pi x)^{2n}}{(2n)!\,2} - \frac{(-1)^n (2\pi x)^{2n+1}}{(2n+1)!\,2},$$

de sorte que nous trouvons dans ce cas

$$(14) \quad |\delta_{2n+1}(x)| < \delta_{n-m} \cdot e^{|2\pi x|} + \frac{g + e^{|2\pi x|}}{2m+1 - |2\pi x|} \cdot \frac{|2\pi x|^{2m+1}}{(2m)!} + \frac{\pi \cdot |2\pi x|^{2n}}{(2n)!}$$

et, pourvu que la condition (10) soit remplie,

$$(15) \quad |\delta_{2n+1}(x)| < \delta_{n-m} \cdot e^{2\pi K} + \frac{g + e^{2\pi K}}{2m+1 - 2\pi K} \cdot \frac{(2\pi K)^{2m+1}}{(2m)!} + \frac{\pi (2\pi K)^{2n}}{(2n)!}.$$

Cela posé, il est évident que la convergence de la série

$$(16)\quad F(x) = A_0 B_0(x) + A_1 B_1(x) + A_2 B_2(x) + \ldots + A_n B_n(x) + \ldots$$

exige la convergence de ces deux séries à termes constants

$$(17)\qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n A_{2n}}{(2\pi)^{2n}}, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n A_{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}},$$

condition qui est à la fois nécessaire et suffisante. Dans ce cas la série (16) est convergente, quelle que soit la variable x, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$; c'est-à-dire que $F(x)$ est une transcendante entière.

De plus, le théorème II du paragraphe 3 donnera ici:

I. Supposons qu'il existe un nombre $x_1 \neq \frac{p}{4}$ [1], où p est un entier quelconque, tel que la série (16) soit convergente pour $x = x_1$, cette même série est convergente, quelle que soit la variable x, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$; c'est-à-dire que $F(x)$ est une transcendante entière.

Posons

$$(18)\qquad F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

nous aurons, en vertu de (16),

$$(19)\qquad n!\, c_n = A_n + \frac{1}{2} A_{n+1} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{(-1)^s B_s}{(2s)!} \cdot A_{n+2s}.$$

Prenons maintenant pour point de départ la transcendante entière $F(x)$ définie par la série de puissances (18), puis appliquons la formule (3), il résulte

$$(20)\qquad F(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(n!\, c_n \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s B_{n-s}(x)}{(s+1)!} \right).$$

Cela posé, supposons convergentes les deux séries à termes constants

[1] Savoir les zéros des deux fonctions $\cos 2\pi x$ et $\sin 2\pi x$, les valeurs limites de $B_{2n}(x)$ et de $B_{2n-1}(x)$ respectivement.

$$(21) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n (2n)!\, c_{2n}}{(2\pi)^{2n}}, \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!\, c_{2n+1}}{(2\pi)^{2n+1}},$$

puis ordonnons formellement d'après les $B_n(x)$ la série à double entrée qui figure au second membre de (20); je dis, que le coefficient A_n de $B_n(x)$, savoir

$$(22) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (n+s)!\, c_{n+s}}{(s+1)!}$$

est une série convergente, quel que soit n.

En effet, nous aurons évidemment

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s (n+s)!\, c_{n+s}}{(2\pi)^{n+s}} \cdot \frac{(2\pi)^{n+s}}{(s+1)!},$$

et il saute aux yeux que la série A_n est absolument convergente, parce que le premier facteur qui figure sous le signe sommatoire a la valeur limite zéro.

Cela posé, il est évident que la somme finie

$$(23) \qquad s_n = A_0 B_0(x) + A_1 B_1(x) + \ldots + A_n B_n(x)$$

a un sens quel que soit l'indice n; de plus, il saute aux yeux que l'expression

$$F(x) - s_n$$

ne contient que des fonctions de BERNOULLI, dont l'indice est plus grand que n.

Posons ensuite, conformément aux formules (8) et (12),

$$\frac{(-1)^{\lambda m} (2\pi)^m B_m(x)}{2} = \varphi(x) + \delta_m(x),$$

$$\frac{(-1)^{\lambda m+1} (2\pi)^{m+1} B_{m+1}(x)}{2} = \psi(x) + \delta_{m+1}(x),$$

les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne sont autre chose que $\cos 2\pi x$ et $\sin 2\pi x$ ou inversement.

Posons encore

$$u_m = \sum_{s=0}^{s=m-n-1} \frac{(-1)^{\lambda_{m+s}} B_{m-s}(x)\,(2\pi)^m}{(s+1)!\,2}\,,$$

$$a_m = \frac{(-1)^{\lambda_m}\, m!\, c_m \cdot 2}{(2\pi)^m}\,,$$

il est évident que les deux séries infinies

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_{m+2s}\,, \qquad \sum_{s=0}^{s=\infty} |u_{m+2s} - u_{m+2s+1}|$$

sont convergentes quel que soit x, et que la dernière de ces séries est uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$.

Cela posé, il résulte, en vertu d'un théorème bien connu, que la série

$$R_m = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_{m+2s}\, u_{m+2s} \tag{24}$$

est convergente, quelle que soit la variable x, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leqq K$. De plus, la convergence des séries (21) donnera la valeur limite

$$\lim_{m=\infty} R_m = 0. \tag{25}$$

Or, nous aurons, en vertu des formules (20), (23) et (24),

$$F(x) = s_n + R_{n+1} + R_{n+2}\,,$$

ce qui donnera le théorème suivant:

II. *Supposons que la transcendante entière*

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{26}$$

ne soit pas périodique avec la période additive $+1$, *puis supposons que les deux séries* (21), *formées des coefficients* c_m, *soient convergentes, la fonction* $F(x)$ *est développable en série de la forme*

$$F(x) = A_0 B_0(x) + A_1 B_1(x) + \ldots + A_n B_n(x) + \ldots, \tag{27}$$

où les coefficients A_n *sont définis par la formule* (22). *La série de fonctions de* Bernoulli *ainsi ob-*

tenue est convergente quelle que soit la variable x, et uniformément convergente pourvu que $|x| \leqq K$.

Prenons maintenant pour point de départ la formule (27), il résulte, en vertu de la formule (2),

$$F(x) - F(x-1) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n x^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{28}$$

de sorte que tous les coefficients A_n s'évanouissent dans le cas spécial où $F(x)$ est une fonction périodique avec la période additive $+1$.

§ 5. Applications sur les fonctions d'Euler.

Revenons à la formule

$$\frac{(-1)^{\lambda_m} B_m(x)(2\pi)^m}{2} = \varphi_m(x) + \delta_m(x), \tag{1}$$

nous aurons par conséquent

$$\varphi_{2m}(x) = \cos 2\pi x, \quad \varphi_{2m+1}(x) = \sin 2\pi x, \tag{2}$$

ce qui donnera

$$\varphi_m(x-1) = \varphi_m(x)$$
$$\varphi_m\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\varphi_m(x)$$
$$\varphi_m(-x-1) = (-1)^m \varphi_m(x),$$

tandis que nous aurons de même

$$(-1)^m B_m(-x-1) = B_m(x).$$

Cela posé, il résulte, en vertu de la formule (1),

$$(-1)^m \delta_m(-x-1) = \delta_m(x), \tag{3}$$

tandis que l'équation aux différences finies (2) du paragraphe 4 donnera

$$\delta_m(x) - \delta_m(x-1) = \frac{(-1)^{\lambda_m} \pi (2\pi x)^{m-1}}{(m-1)!}; \tag{4}$$

c'est-à-dire que la transcendante entière $\delta_m(x)$ a des propriétés fondamentales analogues à celles de $B_m(x)$.

Appliquons ensuite la formule

$$B_m(x) = 2^{m-1}\left(B_m\left(\frac{x}{2}\right)+B_m\left(\frac{x-1}{2}\right)\right),$$

il résulte, en vertu de (1),

$$\varphi_m(x)+\delta_m(x) = 2^{m-1}\left(\delta_m\left(\frac{x}{2}\right)+\delta_m\left(\frac{x-1}{2}\right)\right). \tag{5}$$

Soit ensuite $E_m(x)$ la fonction d'Euler, nous aurons quel que soit l'indice m

$$E_m(x) = 2^m\left(B_{m+1}\left(\frac{x}{2}\right)-B_{m+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right),$$

ce qui donnera, en vertu de (1),

$$(-1)^{\lambda_m}\pi^m E_m(x) = -\frac{2}{\pi}\,\varphi_{m+1}(x)+\frac{1}{\pi}\left(\delta_{m+1}\left(\frac{x-1}{2}\right)-\delta_{m+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right), \tag{6}$$

formule qui nous permet d'étudier les développements en séries de fonctions d'Euler.

On voit que l'étude de ces séries est parfaitement identique à notre étude sur les séries de fonctions de Bernoulli et que les résultats obtenus sont analogues aux précédents.

CHAPITRE II.

Les polynomes d'Hermite.

§ 6. Définition des polynomes d'Hermite.

Après cette digression sur les suites harmoniques nous avons à résoudre le problème suivant :

Déterminons trois suites infinies

$$\begin{array}{llllll} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_n \ldots\ldots \\ & & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots\ldots & \alpha_n \ldots\ldots \\ & & \beta_2 & \beta_3 & \ldots\ldots & \beta_n \ldots\ldots \end{array}$$

de sorte que les éléments de la suite harmonique $[a_n, f(x)]$ satisfont à la condition

$$f_n(x) = \alpha_n x f_{n-1}(x) + \beta_n f_{n-2}(x) , \quad n \geqq 2. \tag{1}$$

Remarquons tout d'abord que l'équation fonctionnelle (1) est une relation homogène et linéaire dans les a_n, nous pourrons attribuer à a_0 une valeur convenable sans restreindre la généralité de la solution de l'équation fonctionnelle en question; nous posons par conséquant

$$a_0 = 1. \tag{2}$$

Ces remarques faites, introduisons dans (1) les expressions obtenues pour

$$f_n(x), \ f_{n-1}(x), \ f_{n-2}(x),$$

nous aurons, en égalant les coefficients de la puissance x^n qui figure aux deux membres de (1),

$$\frac{1}{n!} = \frac{\alpha_n}{(n-1)!},$$

ce qui donnera

$$a_n = \frac{1}{n}, \tag{3}$$

d'où, en égalant les coefficients de la puissance x^{n-1},

$$\frac{a_1}{(n-1)!} = \frac{a_n a_1}{(n-2)!},$$

savoir

$$a_1 = 0. \tag{4}$$

Soit ensuite $2 \leqq p \leqq n-1$, nous trouvons généralement, en étudiant les coefficients de la puissance x^{n-p},

$$\frac{a_p}{(n-p)!} = \frac{a_n a_p}{(n-p-1)!} + \frac{\beta_n a_{p-2}}{(n-p)!},$$

ce qui donnera, en vertu de (3),

$$\frac{p a_p}{n} = \beta_n a_{p-2}, \qquad 2 \leqq p \leqq n-1. \tag{5}$$

Étudions tout d'abord le cas $p = 2$, il résulte

$$\beta_n = \frac{2a_2}{n},$$

d'où en posant

$$a_2 = -a, \tag{6}$$

où a est un nombre complexe quelconque, différent de zéro,

$$\beta_n = -\frac{2a}{n}. \tag{7}$$

Appliquons ensuite la formule (4), nous aurons successivement le résultat général

$$a_{2p+1} = 0. \tag{8}$$

Cela posé, introduisons, dans (5), $2p$ au lieu de p, la formule en question déviendra

$$a_{2p} = -\frac{a}{p} \cdot a_{2p-2},$$

ce qui donnera généralement

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p a^p}{p!}, \tag{9}$$

de sorte que l'élément général de la suite harmonique cherchée se présente sous la forme

$$H_n(x, a) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s a^s x^{n-2s}}{s!\,(n-2s)!}, \tag{10}$$

ce qui est précisément une généralisation des polynomes remarquables, étudiés pour la première fois par HERMITE.

Il est très intéressant, ce me semble, qu'il n'existe aucune autre suite harmonique que celle formée des polynomes d'HERMITE, dont les éléments satisfont à une équation fonctionnelle de la forme (1), où les α_n et les β_n sont indépendants de x. De plus, il est intéressant, ce me semble, que la seule équation fonctionnelle de cette forme deviendra

$$nH_n(x, a) = xH_{n-1}(x, a) - 2aH_{n-2}(x, a). \tag{11}$$

Les premiers des polynomes $H_n(x. a)$ deviennent

$$H_0(x, a) = 1$$
$$H_1(x, a) = x$$
$$H_2(x, a) = \frac{x^2}{2} - a$$
$$H_3(x, a) = \frac{x^3}{6} - ax$$
$$H_4(x, a) = \frac{x^4}{24} - \frac{ax^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$
$$H_5(x, a) = \frac{x^5}{120} - \frac{ax^3}{6} + \frac{a^2x}{2}$$
$$H_6(x, a) = \frac{x^6}{720} - \frac{ax^4}{24} + \frac{a^2x^2}{4} - \frac{a^3}{6}.$$

Remarquons que la définition des polynomes d'HERMITE donnera immédiatement les identités

$$H_n\left(\frac{x}{2a}, \frac{1}{4a}\right) = \frac{1}{(2a)^n} H_n(x, a), \tag{12}$$

$$H_n(x\sqrt{a}, a) = a^{\frac{n}{2}} H_n(x, 1)\,, \tag{13}$$

il saute aux yeux que la variable a ne joue aucun rôle essentiel dans les polynomes d'HERMITE. Néanmoins, l'introduction de ce paramètre quelconque rend beaucoup plus flexibles les fonctions $H_n(x, a)$, nous le verrons bientôt.

Remarquons maintenant que les $H_n(x, a)$ forment une suite harmonique, considérées comme fonctions de x, nous aurons la série de TAYLOR

$$H_n(x+h, a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{h^s}{s!} H_{n-s}(x, a)\,, \tag{14}$$

ce qui donnera pour $h = -x$

$$\frac{(-1)^n a^n}{n!} = \sum_{s=0}^{s=2n} \frac{(-1)^s x^s}{s!} H_{2n-s}(x, a)\,, \tag{15}$$

$$0 = \sum_{s=0}^{s=2n+1} \frac{(-1)^s x^s}{s!} H_{2n-s+1}(x, a). \tag{16}$$

De plus, l'identité évidente

$$D_a H_n(x, a) = -H_{n-2}(x, a) \tag{17}$$

donnera cet autre développement analogue à (14)

$$H_n(x, a+h) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s h^s}{s!} H_{n-2s}(x, a), \tag{18}$$

d'où, en supposant $h = -a$

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{a^s}{s!} H_{n-2s}(x, a). \tag{19}$$

L'application du théorème II du paragraphe 1 est évidente; nous aurons immédiatement

$$A_{2n+1} = \sum_{s=0}^{s=2n+1} (-1)^s H_{2n-s+1}(x, a) H_s(x, b) = 0\,, \tag{20}$$

$$(21)\quad A_{2n} = \sum_{s=0}^{s=2n} (-1)^s H_{2n-s}(x, a) H_s(x, b) = \frac{(-1)^n (a+b)^n}{n!}.$$

Quant à la suite harmonique, dont l'élément général est le polynome

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} H_{n-s}(x, a) H_s(x, b),$$

la base correspondante $[b_n]$ se détermine comme suit

$$b_{2n+1} = 0,$$

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{a+b}{4}\right)^n,$$

ce qui donnera la formule curieuse

$$(22)\qquad 2^n H_n\left(x, \frac{a+b}{4}\right) = \sum_{s=0}^{s=n} H_{n-s}(x, a) H_s(x, b),$$

qui représente une formule d'addition relativement au dernier argument de $H_n(x, a)$.

Combinons la formule (17) et l'identité évidente

$$D_x H_n(x, a) = H_{n-1}(x, a),$$

nous verrons que l'équation aux dérivées partielles

$$(23)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

admet comme intégrale particulière le polynome d'HERMITE

$$(24)\qquad u = H_n(x, y),$$

quel que soit l'indice n.

Dans nos recherches suivantes nous retrouvons plusieurs fois l'équation aux dérivées partielles susdite.

§ 7. Formules récursives générales.

Il est très intéressant, ce me semble, que les polynomes d'HERMIRE jouent un rôle important dans la théorie des équations fonctionnelles beaucoup plus générales que celle étudiée dans le paragraphe précédent.

En effet, il saute aux yeux que l'équation aux différences finies par rapport à ν

$$(1) \qquad \nu\,\eta_\nu(x, a) = x\,\eta_{\nu-1}(x, a) - 2a\,\eta_{\nu-2}(x, a)$$

admet, pour ν égal au positif entier n, la solution

$$(2) \qquad \eta_n(x, a) = H_n(x, a)\,,$$

solution particulière qui est intimément liée à la solution la plus générale $\eta_\nu(x, a)$.

En effet, je dis en premier lieu, que nous aurons la formule générale

$$(3) \qquad \binom{\nu}{n}\eta_\nu(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (2a)^s}{s!} H_{n-s}(x, a)\,\eta_{\nu-n-s}(x, a)\,,$$

où n est un positif entier quelconque.

Remarquons tout d'abord que la formule (3) deviendra, pour $\nu = 1$, précisément l'équation aux différences finies (1), que nous avons prise pour point de départ.

Quant à la conclusion de n à $n+1$, multiplions par $\nu - n$ les deux membres de (3), puis appliquons l'identité évidente

$$(\nu - n)\,\eta_{\nu-n-s}(x, a) = (\nu - n - s)\,\eta_{\nu-n-s}(x, a) + s\,\eta_{\nu-n-s}(x, a),$$

nous aurons, en divisant en deux parties la somme qui figure au second membre, puis substituant dans la dernière s par $s+1$,

$$\binom{\nu}{n}(\nu - n)\,\eta_\nu(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (2a)^s}{s!} H_{n-s}(x, a)\,(\nu - n - s)\,\eta_{\nu-n-s}(x, a) -$$

$$- 2a \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (2a)^s}{s!} H_{n-s-1}(x, a)\,\eta_{n-s-1}(x, a).$$

Appliquons ensuite la formule tirée de (1) en y substituant $\nu - n - s$ au lieu de ν, il résulte après une légère modification

$$\binom{\nu}{n}(\nu-n)\,\eta_\nu(x,a) = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s(2a)^s}{s!}H_{n-s}(x,a)\,\eta_{\nu-n-s-1}(x,a) + $$
$$+\sum_{s=1}^{s=n+1}\frac{(-1)^s s\,(2a)^s}{s!}H_{n-s+1}(x,a)\,\eta_{\nu-n-s-1}(x,a) -$$
$$-2a\cdot\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(2a)^s}{s!}H_{n-s-1}(x,a)\,\eta_{\nu-n-s-1}(x,a).$$

Ajoutons maintenant la première et la dernière des sommes qui figurent au second membre, l'équation fonctionnelle des polynomes d'HERMITE donnera

$$\binom{\nu}{n}(\nu-n)\,\eta_\nu(x,a) = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s(n-s+1)(2a)^s}{s!}H_{n-s+1}(x,a)\,\eta_{\nu-n-s-1}(x,a) +$$
$$+\sum_{s=1}^{s=n+1}\frac{(-1)^s s\,(2a)^s}{s!}H_{n-s+1}(x,a)\,\eta_{\nu-n-s-1}(x,a),$$

ce qui est précisément la formule obtenue de (3) en y remplaçant n par $n+1$.

En second lieu, je dis, que nous aurons aussi la formule générale

$$(4)\quad H_n(x,a)\,\eta_\nu(x,a) = \sum_{s=0}^{s=n}\frac{(2a)^s}{s!}\binom{\nu+n-2s}{n-s}\eta_{\nu+n-2s}(x,a),$$

où n est un positif entier quelconque.

En effet, soit $n=1$, nous retrouvons la formule obtenue de (1) en y remplaçant ν par $\nu+1$.

Quant à la conclusion de n à $n+1$, multiplions par x les deux membres de (4), puis appliquons les identités

$$x\,\eta_{\nu-n-2s}(x,a) = (\nu-n-2s+1)\,\eta_{\nu-n-2s+1}(x,a) + 2a\,\eta_{\nu-n-2s-1}(x,a),$$

il résulte après une légère modification de la première des sommes qui figurent au second membre

$$xH_n(x, a)\eta_\nu(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2a)^s}{s!} \binom{\nu+n-2s+1}{n-s+1} (n-s+1)\eta_{\nu+n-2s+1}(x, a) +$$

$$+ 2a \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2a)^s}{s!} \binom{\nu+n-2s}{n-s} \eta_{\nu+n-2s-1}(x, a).$$

Appliquons ensuite la formule obtenue de (4) en y posant $n-1$ au lieu de n, savoir

$$2aH_{n-1}(x, a)\eta_\nu(x, a) = 2a \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(2a)^s}{s!} \binom{\nu+n-2s-1}{n-s-1} \eta_{\nu+n-2s-1}(x, a),$$

puis soustrayons les deux formules ainsi obtenues, il résulte

$$(n+1)H_{n+1}(x, a)\eta_\nu(x, a) =$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2a)^s}{s!} \binom{\nu+n-2s+1}{n-s+1} (n-s+1)\eta_{\nu+n-2s+1}(x, a) +$$

$$+ 2a \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2a)^s}{s!} \binom{\nu+n-2s-1}{n-s} \eta_{\nu+n-2s-1}(x, a),$$

ce qui est précisément la formule tirée de (4) en y remplaçant n par $n+1$.

Introduisons maintenant, dans (3), $\nu = n+p$, où p est un positif entier, il résulte la formule spéciale

$$(5) \quad \binom{n+p}{n} H_{n+p}(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (2a)^s}{s!} H_{n-s}(x, a) H_{p-s}(x, a),$$

où il faut supposer $p \geq n$. Les formules les plus intéressantes qui correspondent à $p = n$, $p = n+1$ sont évidentes.

Soit dans (4) $\nu = p$, où p désigne un positif entier, égal à n au moins, nous aurons la formule spéciale

$$(6) \quad H_n(x, a) H_p(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(2a)^s}{s!} \binom{n+p-2s}{n-s} H_{n+p-2s}(a, a),$$

qui est précisément l'inversion de la formule (5). Les cas les plus intéressants de la formule (6) qui correspondent à $p = n$, $p = n+1$ sont évidents.

Dans le paragraphe 10 nous avons à étudier, d'un autre point de vue, les deux formules spéciales (5) et (6).

§ 8. Les polynomes $G_n(x, a)$.

Pour mettre en pleine lumière la nature singulière des polynomes d'HERMITE, nous avons à déterminer la suite infinie de fonctions

$$(1)\qquad G_0(x, a),\ G_1(x, a),\ G_2(x, a),\ \ldots,\ G_n(x, a)\ \ldots,$$

assujetties à satisfaire à la condition

$$(2)\qquad G_n(x, a) = \frac{(n+1)H_{n+1}(x, a)G_{n-1}(x, a) + (2a)^n}{H_n(x, a)}, \qquad n \geqq 1,$$

tandis que nous posons

$$(3)\qquad G_0(x, a) = 1.$$

Soit particulièrement $n = 1$, la formule (2) donnera immédiatement:

$$(4)\qquad G_1(x, a) = \frac{x^2 - 2a + 2a}{x} = x.$$

Supposons ensuite $n \geqq 2$, puis appliquons l'identité

$$(n+1)H_{n+1}(x, a) = xH_n(x, a) - 2aH_{n-1}(x, a),$$

il résulte, en vertu de (2),

$$(5)\qquad G_n(x, a) = xG_{n-1}(x, a) - 2a \cdot \frac{H_{n-1}(x, a)G_{n-1}(x, a) - (2a)^{n-1}}{H_n(x, a)}.$$

Or, nous aurons, en introduisant, dans (2), $n-1$ au lieu de n

$$H_{n-1}(x, a)G_{n-1}(x, a) = nH_n(x, a)G_{n-2}(x, a) + (2a)^{n-1};$$

c'est-à-dire que la formule (5) se présente dans cette forme élégante

$$(6)\qquad G_n(x, a) = xG_{n-1}(x, a) - 2naG_{n-2}(x, a), \qquad n \geqq 2,$$

de sorte que nous avons démontré le théorème suivant:

I. L'élément général $G_n(x, a)$ de la suite (1), définie à l'aide des conditions (2) et (3), est toujours un polynome entier du degré n par rapport à x.

Les premiers de ces polynomes deviennent

$$\begin{aligned}
G_0(x, a) &= 1 \\
G_1(x, a) &= x \\
G_2(x, a) &= x^2 - 4a \\
G_3(x, a) &= x^3 - 10ax \\
G_4(x, a) &= x^4 - 18ax^2 + 32a^2 \\
G_5(x, a) &= x^5 - 28ax^3 + 132a^2x \\
G_6(x, a) &= x^6 - 40ax^4 + 348a^2x^2 - 384a^3.
\end{aligned}$$

Soit généralement

$$G_n(x, a) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s a_{n,2s} a^s x^{n-2s}, \tag{7}$$

la formule récursive (6) donnera immédiatement

$$a_{n,2s} = a_{n-1,2s} + 2n\, a_{n-2,2s-2}, \qquad s \geqq 1, \tag{8}$$

$$a_{n,0} = 1; \tag{9}$$

c'est-à-dire que les coefficients numériques $a_{n,2s}$ sont des positifs entiers.

On trouvera par exemple

$$a_{n,2} = (n-1)(n+2), \tag{10}$$

$$a_{2n,2n} = n!\, 2^{2n}. \tag{11}$$

Étudions maintenant la généralisation suivante de l'équation fonctionelle (6)

$$g_\nu(x, a) = x g_{\nu-1}(x, a) - 2\nu a g_{\nu-2}(x, a), \tag{12}$$

où ν est une variable complexe quelconque, le procédé que nous venons d'appliquer dans le paragraphe précédent donnera ici les formules générales

$$\frac{1}{n!} g_{\nu+n}(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\nu+1}{s} (2a)^s H_{n-s}(x, a)\, g_{\nu-s}(x, a), \tag{13}$$

$$(14)\quad H_n(x,a)\,g_\nu(x,a) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\nu+1}{s} \frac{(2a)^s}{(n-s)!} g_{\nu+n-2s}(x,a).$$

Soit maintenant ν égal au positif entier p, nous aurons les deux formules spéciales

$$(15)\quad \frac{1}{n!} G_{n+p}(x,a) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{p+1}{s} (2a)^s H_{n-s}(x,a) G_{p-s}(x,a),$$

$$(16)\quad H_n(x,a) G_p(x,a) = \sum_{s=0}^{s=n} \binom{p+1}{s} \frac{(2a)^s}{(n-s)!} G_{n+p-2s}(x,a),$$

où il faut supposer $p \geqq n$.

Les formules les plus simples de ce genre, obtenues en posant $p=n$, $p=n+1$, sont évidentes.

Remarquons en passant que les fonctions $g_\nu(x,a)$ et $\eta_\nu(x,a)$, définies par les deux équations aux différences finies (12) et (1) du paragraphe 7 sont liées par la relation

$$(17)\qquad g_\nu(x,a) = \frac{(\nu+1)\eta_{\nu+1}(x,a)\,g_{\nu-1}(x,a) + (2a)^\nu}{\eta_\nu(x,a)}.$$

Dans le paragraphe 16 nous avons à retrouver les polynomes $G_n(x,a)$, d'un point de vue entièrement différent du précédent.

§ 9. Sur deux classes d'équations algébriques.

Revenons maintenant à la définition des polynomes d'HERMITE, savoir

$$(1)\quad \begin{cases} D_x H_n(x,a) = H_{n-1}(x,a), & n \geqq 1, \\ nH_n(x,a) = xH_{n-1}(x,a) - 2anH_{n-2}(x,a), & n \geqq 2, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} H_1(x,a) = x, \\ H_0(x,a) = 1, \end{cases}$$

nous aurons immédiatement le théorème suivant:

I. Soit $a \neq 0$, et soit n un positif entier, l'équation algébrique du n-ième degré

$$H_n(x, a) = 0 \tag{3}$$

a toujours ses racines inégales.

En effet, une racine multiple de l'équation en question sera commune à l'équation donnée et à toutes les autres équations

$$H_p(x, a) = 0\,, \quad n-1 \geqq p \geqq 0\,,$$

ce qui est impossible, parce que $H_0(x, a)$ est une constante.

Étudions maintenant le cas spécial où a est une quantité réelle et positive, nous verrons que les fonctions

$$H_n(x, a)\,, \; H_{n-1}(x, a)\,, \; \ldots, \; H_1(x, a)\,, \; H_0(x, a)$$

forment une suite de STURM, ce qui donnera le théorème suivant, dû à HERMITE:

II. Soit a une quantité réelle et positive, l'équation algébrique du n-ième degré

$$H_n(x, a) = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales. De plus, les racines de cette autre équation algébrique

$$H_{n-1}(x, a) = 0$$

séparent celles de la précédente.

Soient maintenant

$$\alpha_{n,1}, \; \alpha_{n,2}, \; \ldots, \; \alpha_{n,n} \tag{4}$$

les racines, réelles et inégales, de l'équation

$$H_n(x, 1) = 0\,, \tag{5}$$

tandis que a désigne un nombre complexe quelconque, différent de zéro, l'identité (13) du paragraphe 6

$$H_n(x\sqrt{a}, a) = a^{\frac{n}{2}} H_n(x, 1)$$

montrera clairement que les racines de l'équation algébrique générale

$$H_n(x, a) = 0$$

deviennent précisément

(6) $$\alpha_{n,1} \cdot \sqrt{a}\,, \quad \alpha_{n,2} \cdot \sqrt{a}\,, \quad \ldots, \quad \alpha_{n,n} \cdot \sqrt{a}\,;$$

c'est-à-dire que ces racines sont situées dans la ligne droite déterminée par l'Origine et le point $\sqrt{a}$, de sorte que nous aurons le théorème suivant, plus général que le précédent:

III. *Soit a un nombre complexe quelconque, différent de zéro, les racines de l'équation algébrique*

$$H_{n-1}(x, a) = 0$$

séparent celles de cette autre équation algébrique

$$H_n(x, a) = 0.$$

Quant aux racines (4), je dis que nous aurons toujours

(7) $$|\alpha_{n,s}| < \sqrt{n(n-1)}\,, \quad 1 \leqq s \leqq n.$$

En effet, soit

$$x \geqq \sqrt{n(n-1)}\,,$$

nous aurons

$$\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-2}}{1!(n-2)!} \geqq 0\,,$$

$$\frac{x^{n-2p+2}}{(p-1)!(n-2p+2)!} - \frac{x^{n-2p}}{p!(n-2p)!} > 0\,,$$

ce qui donnera immédiatement

$$H_n(x, 1) > 0.$$

Cela posé, revenons maintenant à la formule (2) du paragraphe précédent, savoir

(8) $$H_n(x, a)\, G_n(x, a) = (n+1)\, H_{n+1}(x, a)\, G_{n-1}(x, a) + (2a)^n\,,$$

où a est un nombre complexe quelconque, différent de zéro, puis désignons par

$$\gamma_{n+1,1}\,, \quad \gamma_{n+1,2}\,, \quad \ldots, \quad \gamma_{n+1,n+1}$$

les racines de l'équation algébrique

$$H_{n+1}(x, a) = 0\,,$$

nous aurons par conséquent, en vertu de (8),

(9) $$H_n(\gamma_{n+1,s}, a)\, G_n(\gamma_{n+1,s}, a) = (2a)^n,$$

de sorte que le théorème II donnera immédiatement cet autre:

IV. Soit a une quantité réelle et positive, l'équation algébrique du n-ième degré

$$G_n(x, a) = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales, et ces racines séparent celles de l'équation algébrique du degré $n+1$

$$H_{n+1}(x, a) = 0.$$

Désignons ensuite par

(10) $$\delta_{n-1,1},\ \delta_{n-1,2},\ \ldots,\ \delta_{n-1,n-1}$$

les racines de l'équation algébrique du degré $n-1$

$$G_{n-1}(x, a) = 0,$$

la formule (8) donnera de même

$$H_n(\delta_{n-1,s}, a)\, G_n(\delta_{n-1,s}, a) = (2a)^n;$$

c'est-à-dire que les racines (10) séparent celles de l'équation du n-ième degré

$$G_n(x, a) = 0.$$

Soit maintenant a un nombre complexe quelconque, différent de zéro, l'identité évidente

(11) $$G_n(x\sqrt{a}, a) = a^{\frac{n}{2}}\, G_n(x, 1)$$

donnera le théorème suivant:

V. Soit a un nombre complexe quelconque, différent de zéro, l'équation algébrique du n-ième degré

$$G_n(x, a) = 0$$

a toutes ses racines inégales, et ces racines séparent celles des deux autres équations algébriques du degré $n+1$

$$H_{n+1}(x, a) = 0\,, \quad G_{n+1}(x, a) = 0.$$

Désignons ensuite par

$$\beta_{n,1}\,,\ \beta_{n,2}\,,\ \ldots\,,\ \beta_{n,n}$$

les racines, réelles et inégales de l'équation

$$G_n(x, 1) = 0\,,$$

nous aurons par conséquent

$$|\beta_{n,s}| < \sqrt{n(n+1)}\,, \quad 1 \leqq s \leqq n.$$

Remarquons encore en passant que la formule (9) donnera cette représentation curieuse

$$(12) \qquad G_n(x, a) = \sum_{s=1}^{s=n+1} \frac{(2a)^n}{(H_n(\gamma_{n+1,s}, a))^2} \cdot \frac{H_{n+1}(x, a)}{x - \gamma_{n+1,s}}\,,$$

où les $\gamma_{n+1,s}$ sont les racines de

$$H_{n+1}(x, a) = 0.$$

En effet, la formule (12) donnera immédiatement

$$G_n(\gamma_{n+1,s}, a) = \frac{(2a)^n}{H_n(\gamma_{n+1,s}, a)}\,,$$

savoir la formule (9), de sorte que l'équation algébrique (12), du degré n au plus, a néanmoins $n+1$ racines différentes; c'est-à-dire que l'équation en question est une identité.

Dans le paragraphe 16 nous avons à retrouver, d'un autre point de vue, la formule (12).

CHAPITRE III.

Applications de la fonction exponentielle.

§ 10. Les formules d'Hermite et de M. Appell.

Les éléments de la base $[a_n]$ de la suite harmonique formée des polynomes d'HERMITE étant déterminés par les expressions

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a^n}{n!}, \qquad a_{2n+1} = 0,$$

la fonction

$$\varphi(\alpha) = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \ldots + a_n \alpha^n + \ldots$$

deviendra dans ce cas

$$\varphi(\alpha) = e^{-a\alpha^2},$$

de sorte que la formule correspondante de M. APPELL se présente sous la forme

$$(1) \qquad e^{-a\alpha^2 + \alpha x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} H_n(x, a)\, \alpha^n.$$

série qui est convergente quelles que soient les deux variables x et α.

Substituons, dans (1), αi au lieu de α, il résultent ces deux autres développements toujours convergents

$$(2) \qquad e^{a\alpha^2} \cos(\alpha x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n H_{2n}(x, a)\, \alpha^{2n},$$

$$(3) \qquad e^{a\alpha^2} \sin(\alpha x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n H_{2n+1}(x, a)\, \alpha^{2n+1}.$$

Remarquons que la formule (1) se présente aussi dans la forme

$$e^{-\left(\alpha - \frac{x}{2a}\right)^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\, \alpha^n,$$

il est évident que le second membre de cette formule n'est autre chose que la série de TAYLOR qui représente la fonction $f(x - 2a\alpha)$, où

$$f(x) = e^{-a\left(\frac{x}{2a}\right)^2} = e^{-\frac{x^2}{4a}},$$

ce qui donnera, pour une valeur quelconque de n,

$$D_x^n e^{-\frac{x^2}{4a}} = \frac{(-1)^n n!}{(2a)^n} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a), \tag{4}$$

savoir la formule que l'illustre HERMITE a prise comme définition des polynomes $H_n(x, a)$.

Il saute aux yeux que l'on pourra démontrer, par la conclusion de n à $n+1$, cette formule essentielle d'HERMITE, ce qui nous conduira précisément à la formule récursive (11) du paragraphe 6 et par conséquent à l'expression explicite de $H_n(x, a)$ indiquée dans la formule (10) du paragraphe susdit.

De plus, il est très facile de déduire, à l'aide de (4), une suite des résultats que nous venons de trouver relativement aux polynomes d'HERMITE.

En premier lieu, supposons que a soit une quantité réelle et positive, la formule (4) montre clairement que l'équation algébrique

$$H_n(x, a) = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales.

En second lieu, appliquons l'identité

$$D_x^{n+p} e^{-\frac{x^2}{4a}} = \frac{(-1)^n n!}{(2a)^n} D_x^p\left(e^{-\frac{x^2}{4a}} \cdot H_n(x, a)\right),$$

tirée directement de (4), la formule de LEIBNIZ nous conduira immédiatement à la formule (5) du paragraphe 7.

Introduisons ensuite, dans la formule en question, $n-q$ et $p-q$ au lieu de n et p respectivement, puis déterminons, à l'aide des équations linéaires ainsi obtenues, les produits

$$H_{n-q}(x, a)\, H_{p-q}(x, a)\,,$$

nous trouvons précisément la formule (6) du paragraphe 7, ce qui est une conséquence immédiate des formules (10) et (19) du paragraphe 6, savoir l'expression explicite de $H_n(x, a)$ et le développement de x^n d'après les polynomes d'Hermite, parce que les deux systèmes d'équations linéaires ont les mêmes coefficients numériques.

Remarquons en passant que la fonction

$$u = \frac{e^{\frac{x^2}{4y}}}{\sqrt{y}} \tag{5}$$

est intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles (23) du paragraphe 6, savoir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \tag{6}$$

satisfaite par un polynome d'Hermite $H_n(x, y)$ quelconque.

En effet, nous trouvons directement

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{e^{\frac{x^2}{4y}}}{2y^{\frac{3}{2}}} H_2(x, y)\,,$$

tandis qu'il résulte, en vertu de (4),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{\frac{x^2}{4y}}}{2y^{\frac{3}{2}}} H_2(x, y)\,,$$

ce qui nous conduira immédiatement à l'équation (6).

Il est digne de remarque, ce me semble, que cette propriété de la fonction u est une conséquence immédiate d'une formule intégrale de Laplace [1]

[1] Théorie analytique des probabilités, p. 97—98; Paris 1820.

§ 11. Formules intégrales d'Hermite.

Revenons à la formule (4) du paragraphe 10, nous aurons en intégrant par rapport à x

$$\int e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\, dx = \frac{(-1)^n (2a)^n}{n!} D_x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{4a}},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(1) \qquad \int e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\, dx = -\frac{2a}{n} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_{n-1}(x, a).$$

Soit ensuite $f(x)$ une fonction, dont les n premières derivées sont continues, l'intégration par parties donnera

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \int e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x,a) f(x)\, dx = -\frac{e^{-\frac{x^2}{4a}}}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n-1} (n-s-1)!\,(2a)^{s+1} H_{n-s-1}(x,a) f^{(s)}(x) \\ + \frac{(2a)^n}{n!} \cdot \int e^{-\frac{x^2}{4a}} f^{(n)}(x)\, dx. \end{aligned} \right.$$

Supposons particulièrement que $f(x)$ soit un polynome entier de x d'un degré inférieur à n, puis supposons positive la partie réelle de a, savoir

$$\Re(a) > 0,$$

ce qui donnera par conséquent

$$\Re\left(\frac{1}{a}\right) > 0,$$

nous aurons immédiatement, en vertu de (2),

$$(3) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a) f(x)\, dx = 0.$$

Soit ensuite $f(x)$ un polynome entier précisément du n-ième degré par rapport à x, savoir

$$(4) \qquad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

la formule (2) donnera de même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a) f(x)\, dx = a_0 (2a)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} dx,$$

d'où, en vertu de la formule intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} dx = \sqrt{4\pi a}\,,$$

bien connue de la théorie de la fonction gamma,

$$(5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\, f(x)\, dx = a_0 (2a)^n \sqrt{4\pi a}\,.$$

Dans le cas spécial

$$f(x) = H_p(x, a)$$

nous trouvons par conséquent, en vertu de (3) et (5),

$$(6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\, H_p(x, a)\, dx = 0\,, \qquad n \neq p$$

$$(7) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a}} \left(H_n(x, a)\right)^2 dx = \frac{(2a)^n \sqrt{4\pi a}}{n!}\,,$$

savoir les deux formules intégrales dues à HERMITE; c'est-à-dire que la suite des fonctions

$$e^{-\frac{x^2}{8a}} H_0(x, a)\,, \quad e^{-\frac{x^2}{8a}} H_1(x, a)\,, \ \ldots \ e^{-\frac{x^2}{8a}} H_n(x, a)\,, \ \ldots$$

sont, pour $\Re(a) > 0$, conformément à la terminologie de la théorie des équations intégrales, des fonctions orthogonales.

Quant aux applications des deux formules (6) et (7), supposons que la série infinie

$$(8) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n H_n(x, a)\,,$$

multipliée par la fonction

$$e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\,,$$

soit intégrable terme à terme de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, il résulte, pour le coefficient général A_n, cette expression intégrale

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-\frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\, dx = \frac{(2a)^n \sqrt{4\pi a}}{n!} \cdot A_n.$$

Appliquons par exemple la formule (1) du paragraphe 10, nous trouvons de cette manière

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x - \frac{x^2}{4a}} H_n(x, a)\, dx = \frac{(2a\alpha)^n \sqrt{4\pi a}}{n!} e^{a\alpha^2}, \tag{10}$$

formule qui est une conséquence immédiate de la formule récursive (2).

Il est évident qu'il existe dans la théorie des polynomes d'HERMITE une théorème analogue à celui connu pour les fonctions ultrasphériques $P^{\nu, n}(x)$ [1], savoir:

I. *Le polynome $H_n(x, a)$ d'HERMITE est le seul polynome du degré n par rapport à x qui satisfait aux $n+1$ conditions suivantes:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, e^{-\frac{x^2}{4a}} dx = (2a)^n \sqrt{4\pi a} \tag{11}$$

et, en désignant par p un nombre entier, tel que $0 \leq p \leq n-1$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)\, e^{-\frac{x^2}{4a}} dx = 0\,; \tag{12}$$

nous supposons naturellement $\Re(a) > 0$.

En effet, $f(x)$ étant du n-ième degré par rapport à x, il existe une identité de la forme

$$f(x) = a_n H_n(x, a) + a_{n-1} H_{n-1}(x, a) + \ldots + a_0 H_0(x, a), \tag{13}$$

où les coefficients a_p sont des constantes.

Posons ensuite pour abréger

$$\beta_{p, r} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^p H_r(x, a)\, e^{-\frac{x^2}{4a}} dx,$$

nous aurons par conséquent

$$\beta_{p, r} = 0, \quad p < r. \tag{14}$$

Cela posé, il résulte, en vertu de (12) et (13),

[1] Voir par exemple mon Théorie des fonctions métasphériques, p. 104—105; Paris 1911.

$$\alpha_p \beta_{p,p} + \alpha_{p-1} \beta_{p,p-1} + \ldots + \alpha_0 \beta_{p,0} = 0, \quad 0 \leqq p \leqq n-1,$$

ce qui donnera immédiatement

$$\alpha_p = 0, \quad 0 \leqq p \leqq n-1; \tag{15}$$

de plus, nous aurons, en vertu de (11) et (13),

$$\alpha_n \beta_{n,n} + \alpha_{n-1} \beta_{n,n-1} + \ldots + \alpha_0 \beta_{n,0} = \beta_{n,n} = (2a)\sqrt[n]{4\pi a};$$

c'est-à-dire que nous aurons

$$\alpha_n = 1$$

où, ce qui est la même chose

$$f(x) = H_n(x, a).$$

Du reste, on voit que le polynome $f(x)$ du degré n par rapport à x est entièrement déterminé quand les $n+1$ intégrales (11) et (12) ont des valeurs données.

§ 12. Les fonctions ultrasphériques et les polynomes d'Hermite.

Il est intéressant, ce me semble, que les fonctions ultrasphériques

$$P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)(2x)^{n-2s}}{s!(n-2s)!} \tag{1}$$

et les polynomes d'Hermite sont liés par des formules intégrales très simples.

En effet, nous aurons

$$H_n(2x\sqrt{t}, 1) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s (2x)^{n-2s} t^{\frac{n}{2}-s}}{s!(n-2s)!},$$

de sorte que la formule intégrale

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\mu-1} dt = \Gamma(\mu), \quad \Re(\mu) > 0,$$

donnera immédiatement

(2) $$P^{\nu,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \int_0^\infty H_n(2x\sqrt{t}, 1)\, e^{-t}\, t^{\nu+\frac{n}{2}-1}\, dt\,,$$

où il faut supposer

(3) $$\Re\left(\nu + \frac{n}{2}\right) > 0.$$

On voit que la formule intégrale (2) se présente, par la transformation $t = z^2$, dans cette autre forme

(4) $$P^{\nu,n}(x) = \frac{2}{\Gamma(\nu)} \cdot \int_0^\infty e^{-t^2} H_n(2tx, 1)\, t^{2\nu+n-1}\, dt.$$

Il est très curieux, ce me semble, qu'il existe une très simple formule inverse de celle que nous venons de développer.

En effet, prenons pour point de départ la formule intégrale de WEIERSTRASS

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_W e^t t^{-\mu}\, dt\,,$$

où le chemin d'intégration commence à $-\infty$ et s'étend au-dessous de l'axe négative en coupant la direction négative de l'axe imaginaire, puis l'axe positive et la direction positive de l'axe imaginaire pour s'éloigner à $-\infty$.

Cela posé, remarquons que la formule (1) donnera

$$P^{\nu,n}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) t^{-\nu-\frac{n}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq\frac{n}{2}} \frac{(-1)^s \Gamma(\nu+n-s)\, x^{n-2s}\, t^{-\nu-n+s}}{s!\,(n-2s)!},$$

il résulte

(5) $$H_n(x, 1) = \frac{\Gamma(\nu)}{2\pi i} \cdot \int_W P^{\nu,n}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) e^t\, t^{-\nu-\frac{n}{2}}\, dt\,,$$

ce qui est précisément l'inversion de (2).

Étudions maintenant la fonction

(6) $$f_n(x, a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x + i\sqrt{4a})^n + (x - i\sqrt{4a})^n}{n!}$$

qui joue, dans la théorie des polynomes d'HERMITE, un rôle analogue à celui des fonctions ultrasphériques.

En effet, nous aurons immédiatement, en vertu de (6),

$$f_n(x, a) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s 2^{2s} (at)^s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!},$$

ce qui donnera

$$\int_0^\infty f_n(x, at) \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s 2^{2s} a^s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)!} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right);$$

appliquons ensuite la formule très connue

$$\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2s-1) \sqrt{\pi}}{2^s}, \quad s > 0,$$

il résulte la formule cherchée

$$H_n(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty f_n(x, at) \frac{e^{-t}\,dt}{\sqrt{t}} \tag{7}$$

qui se présente aussi dans cette autre forme

$$H_n(x, a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty f_n(x, at^2)\, e^{-t^2} dt. \tag{8}$$

On voit facilement que le même procédé conduira à ces deux autres formules intégrales

$$H_n(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty f_n\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, a\right) e^{-t}\, t^{\frac{n-1}{2}} dt, \tag{9}$$

$$H_n(x, a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^\infty f_n\left(\frac{x}{t}, a\right) e^{-t^2}\, t^n dt. \tag{10}$$

La formule inverse de (9) deviendra

$$f_n(x, a) = \frac{1}{i\sqrt{\pi}} \cdot \int_W H_n(x\sqrt{t}, a)\, e^t\, t^{-\frac{n-1}{2}} dt. \tag{11}$$

Remarquons en passant que la formule intégrale (7) donnera sans peine le développement (1) du paragraphe 10.

§ 13. Sur les séries de polynomes d'Hermite.

Le nombre ρ défini dans le paragraphe 2 étant infiniment grand pour les polynomes d'HERMITE, il est évident que la série infinie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n H_n(x, a)\,, \tag{1}$$

où les coefficients A_n sont des constantes, est toujours convergente pourvu que

$$\rho' = \limsup_{n=\infty} \left| \sqrt[n]{A_n} \right| \tag{2}$$

ait une valeur finie quelconque.

Dans ce cas la série en question est absolument convergente, quelle que soit la variable x, et uniformément convergente pourvu que

$$|x| \leq K.$$

L'hypothèse $\rho' = \infty$ exige des recherches ultérieures, parce que la nature de notre série peut être très différente.

En me réservant de revenir à ce sujet dans un second Mémoire je me bornerai à indiquer ici des conditions suffisantes pour la convergence de la série en question.

A cet effet, nous avons tout d'abord à démontrer le lemme suivant:

I. *Supposons $a \neq 0$, nous aurons toujours la valeur majorante*

$$|H_n(x, a)| < \frac{|a|^\nu}{\nu\,!} \cdot e^{\left| x \sqrt{\frac{\nu}{a}} \right|}\,, \tag{3}$$

où

$$\nu = \frac{n}{2}\,, \quad \nu = \frac{n-1}{2}\,, \tag{4}$$

selon que n est pair ou impair.

Étudions par exemple la fonction $H_{2n}(x, a)$ écrite dans la forme

$$H_{2n}(x, a) = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s a^{n-s} x^{2s}}{(n-s)!\,(2s)!}$$

ou, ce qui est la même chose,

$$H_{2n}(x, a) = \frac{(-1)^n a^n}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s n!\, x^{2s}}{(n-s)!\,(2s)!\, a^s},$$

nous aurons immédiatement

$$|H_{2n}(x, a)| \leq \frac{|a|^n}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{n!\, |x|^{2s}}{(2s)!\,(n-s)!\, |a|^s} < \frac{|a|^n}{n!} e^{\left|x\sqrt{\frac{n}{a}}\right|},$$

ce qui est précisément la formule (3) pour une valeur paire de l'indice, et il est évident que la fonction $H_{2n+1}(x, a)$ peut être traitée de la même manière.

Cela posé, nous avons à démontrer le théorème suivant:

II. Désignons par ν le nombre défini par les conditions (4), puis supposons que la série de puissances

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n x^n}{\nu!} \tag{5}$$

ait son rayon de convergence σ plus grand que $|\sqrt{2a}|$, la série (1) est absolument convergente, quel que soit x, et uniformément convergente, pourvu que $|x| \leq K$; c'est-à-dire que $f(x)$ est, dans ce cas, une transcendante entière.

En effet, soit

$$|\sqrt{2a}| < \sigma_1 < \sigma,$$

la série à termes constants

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{A_n \sigma_1^n}{\nu!}$$

est absolument convergente. De plus, nous aurons, en vertu de (3),

$$|A_n H_n(x, a)| < \frac{|A_n a^\nu|}{\nu!} e^{\left|x\sqrt{\frac{\nu}{a}}\right|},$$

ce qui donnera certainement

$$|A_n H_n(x, a)| \leqq \frac{|A_n| \sigma_1^n}{\nu!},$$

pourvu que

$$e^{\left|x\sqrt{\frac{\nu}{a}}\right|} \leqq \frac{\sigma_1^n}{|a|^\nu},$$

savoir

$$|x| < n\left|\sqrt{\frac{a}{\nu}}\right| \log \sigma_1 - |\sqrt{\nu a}| \log |a|,$$

ce qui est vrai pour des valeurs de n qui dépassent une certaine limite, quel que soit x.

Posons conformément à (1)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{6}$$

un théorème très connu de WEIERSTRASS donnera immédiatement

$$n!\, a_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s A_{n+2s} a^s}{s!}. \tag{7}$$

Inversement, prenons pour point de départ la transcendante entière définie par la série de puissances (6), nous avons à démontrer le théorème suivant:

III. Supposons que les coefficients a_n de la série de puissances (6) satisfassent à la condition, quel que soit n,

$$|n!\, a_n| \leqq k^n, \tag{8}$$

où k est une quantité positive quelconque, la transcendante entière $f(x)$ est développable en série de polynomes d'Hermite

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n H_n(x, a), \tag{9}$$

série qui est absolument convergente pour une valeur quelconque de x, et uniformément convergente pourvu que $|x| \leq K$.

En effet, appliquons la formule (19) du paragraphe 6, il résulte, en vertu de la définition (6),

$$(10) \qquad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} n!\, a_n \left(\sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{a^s}{s!} H_{n-2s}(x, a) \right).$$

Cela posé, ordonnons formellement, d'après les $H_n(x, a)$, la série à double entrée qui figure au second membre de (10), le coefficient A_n de $H_n(x, a)$, savoir

$$(11) \qquad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}\, a^s}{s!},$$

est, en vertu de (8), une série absolument convergente, quel que soit n; c'est-à-dire que la somme finie

$$(12) \quad s_n = A_0 H_0(x, a) + A_1 H_1(x, a) + \ldots + A_n H_n(x, a)$$

a un sens pour une valeur quelconque de l'indice n.

De plus, nous aurons, en vertu de (10),

$$(13) \qquad f(x) = s_n + R_{n+1} + R_{n+2},$$

où nous avons posé pour abréger

$$(14) \quad R_m = \sum_{s=0}^{s=\infty} (m+2s)!\, a_{m+2s} \left(\sum_{r=0}^{r=s} \frac{a^r}{r!} H_{m+2s-2r}(x, a) \right).$$

Posons ensuite

$$u_s = \sum_{r=0}^{r=s} \frac{a^r}{r!} H_{m+2s-2r}(x, a),$$

de sorte que la formule (14) se présente dans cette autre forme

$$(15) \qquad R_m = \sum_{s=0}^{s=\infty} (m+2s)!\, a_{m+2s}\, u_s,$$

il résulte, en vertu de (3),

$$|u_s| < \sum_{r=0}^{r=s} \frac{|a|^r}{r!} \cdot \frac{|a|^{\mu+s-r}}{(\mu+s-r)!} \cdot e^{\left|x\sqrt{\frac{\mu+s-r}{a}}\right|},$$

où

$$\mu = \frac{m}{2}, \quad \mu = \frac{m-1}{2},$$

selon que m est pair ou impair, ce qui donnera

$$|u_s| < \frac{|a|^{\mu+s}}{(\mu+s)!} \cdot e^{\left|x\sqrt{\frac{\mu+s}{a}}\right|} \cdot \sum_{r=0}^{r=s} \binom{\mu+s}{r}$$

d'où à fortiori

$$|u_s| < \frac{|2a|^{\mu+s}}{(\mu+s)!} \cdot e^{\left|x\sqrt{\frac{\mu+s}{a}}\right|}.$$

Cela posé, il résulte, en vertu de (15) et (8),

$$|R_m| < \varepsilon_m \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{|ek^2a|^{\mu+s}}{(\mu+s)!} \cdot e^{\left|x\sqrt{\frac{\mu+s}{a}}\right|},$$

où $\varepsilon_m = 1$, $\varepsilon_m = k$, selon que m est pair ou impair, ce qui nous conduira immédiatement au théorème susdit.

Il saute aux yeux que la formule (1) du paragraphe 10

$$e^{\alpha x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} H_n(x, a)\, e^{a\alpha^2} \alpha^n \tag{16}$$

est une conséquence immédiate du théorème que nous venons de démontrer.

Étudions, comme première application de la formule (16), la fonction

$$F(x, \nu) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{x^p}{p!\,(\nu+p)}, \tag{17}$$

qui joue un rôle dans la théorie de la fonction gamma, nous aurons tout d'abord la représentation intégrale

$$F(x, \nu) = \int_0^1 e^{\alpha x} \alpha^{\nu-1} d\alpha, \quad \Re(\nu) > 0. \tag{18}$$

Cela posé, multiplions par $\alpha^{\nu-1}$ la formule (16), puis intégrons par rapport à α de $\alpha = 0$ à $\alpha = 1$, il résulte le développement curieux

$$F(x, \nu) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} F\left(a, \frac{\nu+n}{2}\right) H_n(x, a). \tag{19}$$

Comme seconde application de la formule (16) nous avons à développer la fonction cylindrique de première espèce

$$J^\nu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\, \Gamma(\nu+n+1)}. \tag{20}$$

Prenons pour point de départ la formule intégrale de Bessel

$$J^\nu(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin\varphi)(\sin\varphi)^{2\nu} d\varphi, \quad \Re(\nu) > -\frac{1}{2}, \tag{21}$$

nous aurons, en vertu de la formule (2) du paragraphe 10,

$$J^\nu(\alpha x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n A_n H_n(x, a), \tag{22}$$

où nous avons posé pour abréger

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p\, \Gamma\left(n+p+\frac{1}{2}\right) a^p \alpha^{\nu+2n+2p}}{p!\, \Gamma(\nu+n+p+1)}. \tag{23}$$

On voit du reste que toutes les fonctions étudiées dans les paragraphes 17, 18, 19, 20 de mon Traité sur les fonctions cylindriques nous conduiront à des résultats analogues.

Remarquons encore que la série toujours convergente

$$S = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a^{p+s}}{(p+s)!} H_{n+2s}(x, a) \tag{24}$$

se transforme dans celle-ci

$$(25)\qquad S = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^{n+2s}}{(n+2s)!} \left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{p+s}{2}} J^{p+s}(2\sqrt{a\alpha}).$$

Nous nous bornerons à ces indications sur le développement d'une fonction donnée en série de polynomes d'HERMITE, en remarquant expressément que ces polynomes sont, de ce point de vue, d'un caractère très inaccessible, parce que les coefficients de la série en question, obtenus même pour une fonction très simple, deviennent assez compliqués.

§ 14. Développements élémentaires.

Soit $[f_n(x), \alpha_n]$ une suite harmonique quelconque, le développement (19) du paragraphe 6

$$(1)\qquad \frac{x^n}{n!} = \sum_{s=0}^{< \frac{n}{2}} \frac{a^s}{s!} H_{n-2s}(x, a)$$

nous permet de déterminer les coefficients $A_p(a)$ de l'identité

$$(2)\qquad f_n(x) = \sum_{p=0}^{p=n} A_p(a) H_{n-p}(x, a),$$

mentionnée dans le théorème I du paragraphe 1.

En effet, exprimons, en vertu de (1), tous les termes de

$$(3)\qquad f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\alpha_s x^{n-s}}{(n-s)!},$$

il résulte

$$(4)\qquad A_p(a) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{p}{2}} \frac{\alpha_{p-2s} a^s}{s!},$$

de sorte que les $A_p(a)$ satisfont à la condition

$$(5)\qquad D_a A_p(a) = A_{p-2}(a), \quad p \geq 2,$$

tandis que $A_1(a)$ et $A_0(a)$ sont des constantes par rapport à a.

Soit par exemple

$$a_n = 1,$$

ce qui nous conduira à la suite harmonique étudiée dans le paragraphe 3, savoir

$$(6) \qquad e_n(x) = \frac{x_n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \frac{x}{1!} + 1;$$

posons pour abréger

$$\mu_p = \frac{p}{2}, \quad \mu_p = \frac{p-1}{2},$$

selon que p est pair ou impair, il résulte le développement

$$(7) \qquad e_n(x) = \sum_{p=0}^{p=n} e_{\mu_p}(a)\, H_{n-p}(x, a).$$

Dans le paragraphe 6 nous avons déjà indiqué quelques développements de ce genre, savoir la formule (18) que nous écrivons dans la forme

$$(8) \qquad H_n(x, b) = \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(a-b)^s}{s!} H_{n-2s}(x, a),$$

tandis que la formule (14) du paragraphe susdit donnera, pour la première différence de $H_n(x, a)$, cette expression générale

$$(9) \quad H_n(x, a) - H_n(x-1, a) = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^{s-1}}{s!} H_{n-s}(x, a), \qquad n \geq 1.$$

Étudions encore les fonctions de Bernoulli considérées dans le paragraphe 4, l'expression générale

$$(10) \quad B_n(x) = \frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^{s-1} B_s x^{n-2s}}{(2s)!\,(n-2s)}$$

donnera le développement

$$B_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} b_s(a)\, H_{n-s}(x, a)\,, \tag{11}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} & b_0(a) = 1 \\ & b_{2p} = \frac{a^p}{p\,!} + \sum_{s=1}^{s=p} \frac{(-1)^{s-1} B_s}{(2s)\,!} \cdot \frac{a^{p-s}}{(p-s)\,!}\,, \quad p \geqq 1\,, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

$$b_{2p+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^p}{p\,!}. \tag{13}$$

Remarquons que le caractère inaccessible des polynomes d'HERMITE se présente aussi clairement dans ces développements élémentaires.

En effet, je ne connais que les développements donnés dans les formules (7), (8), (9), dont les coefficients sont d'une forme simple.

Soit, dans (1), n un nombre pair, puis écrivons la formule susdite dans cette forme

$$\frac{x^{2n}}{(2n)\,!} = \sum_{p=0}^{p=n} \frac{a^p}{p\,!\binom{2n-2p}{n-p}} \cdot \binom{2n-2p}{n-p} H_{2n-2p}(x, a)\,,$$

le développement

$$\binom{2n-2p}{n-p} H_{2n-2p}(x, a) = \sum_{r=0}^{r=n-p} \frac{(-1)^r (2a)^r}{r\,!} \left(H_{n-p-r}(x, a)\right)^2$$

tiré directemant de la formule (5) du paragraphe 7, donnera

$$\frac{x^{2n}}{n\,!} = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (2a)^s}{s\,!} A_{n,s}\left(H_{n-s}(x, a)\right)^2, \tag{14}$$

où les coefficients $A_{n,p}$ sont à déterminer par les expressions

$$A_{n,0} = n\,! \tag{15}$$

$$A_{n,p} = n\,! + \sum_{s=1}^{s=p} (-1)^s \binom{p}{s} (n-s)\,!\,(2n-1)\,(2n-3) \ldots (2n-2s+1). \tag{16}$$

Différentions ensuite par rapport à x l'identité (14), il résulte le développement analogue d'une puissance impaire de x, savoir

$$(17)\quad \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{(-1)^s (2a)^s}{s!} A_{n,s} H_{n-s}(x, a) H_{n-s-1}(x, a).$$

On voit que les formules (14) og (17) nous permettent d'étudier les séries de produits de deux polynomes d'HERMITE. Or, il est évident que ces séries deviennent beaucoup plus compliquées que celles que nous venons d'étudier.

CHAPITRE IV.

Les fonctions de seconde espèce.

§ 15. Intégration d'une équation aux différences finies.

Revenons maintenant à l'équation aux différences finies

$$(1) \qquad 2ay_{\nu-2}(x, a) - xy_{\nu-1}(x, a) + \nu y_\nu(x, a) = 0,$$

que nous avons étudiée dans le paragraphe 7 comme une généralisation de celle satisfaite par $H_n(x, a)$.

Quant à l'intégration de l'équation susdite, nous cherchons tout d'abord une solution qui satisfasse aussi à la condition ultérieure

$$(2) \qquad D_x y_\nu(x, a) = y_{\nu-1}(x, a);$$

c'est-à-dire qu'il s'agit évidemment d'intégrer l'équation différentielle homogène et linéaire du second ordre

$$(3) \qquad 2ay'' - xy' + \nu y = 0.$$

Posons comme ordinairement

$$y = \sum_{p=0}^{p=\infty} c_p x^{\rho+2p},$$

il résulte la formule récursive

$$(4) \qquad 2a(\rho + 2p)(\rho + 2p - 1) c_p = (\rho + 2p - 2 - \nu) c_{p-1},$$

tandis que l'exposant ρ est à déterminer comme racine de l'équation quadratique

$$\rho(\rho - 1) = 0,$$

ce qui donnera

$$(5) \qquad \rho = 0, \quad \rho = 1.$$

Soit, en premier lieu, $\rho = 0$, la formule (4) donnera

$$c_p = \frac{\left(p-1-\frac{\nu}{2}\right)}{2p(2p-1)} \cdot \frac{c_{p-1}}{a},$$

ce qui nous conduira à supposer

$$c_0 = \frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}{a^{-\frac{\nu}{2}}},$$

et nous trouvons dans ce cas, comme intégrale particulière de l'équation différentielle (3), la transcendante entière de x

$$(6) \qquad j^{\nu}(x, a) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(s-\frac{\nu}{2}\right)}{a^{s-\frac{\nu}{2}}} \cdot \frac{x^{2s}}{(2s)!}.$$

Quant à la seconde des racines (5), savoir $\rho = 1$, l'hypothèse

$$c_0 = \frac{\Gamma\left(-\frac{1+\nu}{2}\right)}{a^{\frac{1-\nu}{2}}}$$

donnera cette autre intégrale particulière de l'équation susdite

$$(7) \qquad k^{\nu}(x, a) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{1-\nu}{2}\right)}{a^{s+\frac{1-\nu}{2}}} \cdot \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!}.$$

Remarquons que les deux intégrales particulières $j^{\nu}(x,a)$ et $k^{\nu}(x,a)$ sont toujours indépendantes, nous avons en tout cas l'intégrale complète de l'équation différentielle (3), tandis que l'intégration de l'équation aux différences finies (1) exige encore une solution de l'équation fonctionnelle (2).

Or, il saute aux yeux que les deux transcendantes $j^{\nu}(x, a)$, $k^{\nu}(x, a)$ satisfont aux relations

$$(8) \qquad \begin{cases} D_x j^{\nu}(x, a) = k^{\nu-1}(x, a) \\ D_x k^{\nu}(x, a) = j^{\nu-1}(x, a), \end{cases}$$

savoir

$$(9)\quad \begin{cases} D_x^2 j^\nu(x, a) = j^{\nu-2}(x, a) \\ D_x^2 k^\nu(x, a) = k^{\nu-2}(x, a), \end{cases}$$

de plus, nous aurons

$$(10)\quad \begin{cases} D_a j^\nu(x, a) = -j^{\nu-2}(x, a) \\ D_a k^\nu(x, a) = -k^{\nu-2}(x, a); \end{cases}$$

c'est-à-dire que les deux transcendantes entières de x $j^\nu(x, y)$ et $k^\nu(x, y)$ sont des intégrales particulières de l'équation aux dérivées partielles (23) du paragraphe 6 et (6) du paragraphe 10, savoir

$$(11)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Quant à l'intégration de l'équation aux différences finies (1), nous posons

$$(12)\quad K_1^\nu(x, a) = \alpha_1(\nu, a)\, j^\nu(x, a) + \beta_1(\nu, a)\, k^\nu(x, a),$$

de sorte que nous avons à déterminer les deux coefficients $\alpha_1(\nu, a)$ et $\beta_1(\nu, a)$ tels que $K_1^\nu(x, a)$ satisfait à la condition (2), ce qui donnera immédiatement, en vertu de (8),

$$\alpha_1(\nu-1, a) = \beta_1(\nu, a), \quad \beta_1(\nu-1, a) = \alpha_1(\nu, a);$$

c'est-à-dire que $\alpha_1(\nu, a)$ doit être une fonction périodique de ν en ayant la période additive 2, savoir

$$(13)\quad \alpha_1(\nu+2, a) = \alpha_1(\nu, a).$$

Cela posé, il est évident que la fonction $K_1^\nu(x, a)$ se présente sous la forme

$$(14)\quad K_1^\nu(x, a) = \alpha_1(\nu, a)\, j^\nu(x, a) + \alpha_1(\nu-1, a)\, k^\nu(x, a).$$

Soit ensuite

$$(15)\quad K_2^\nu(x, a) = \alpha_2(\nu, a)\, j^\nu(x, a) + \alpha_2(\nu-1, a)\, k^\nu(x, a)$$

une fonction du même genre que $K_1^\nu(x, a)$, savoir

$$(16)\quad \alpha_2(\nu+2, a) = \alpha_2(\nu, a),$$

la solution la plus générale $y_\nu(x, a)$ de l'équation aux différences finies (1) se présente sous la forme

$$(17)\quad y_\nu(x, a) = A_1(\nu, x, a)\, K_1^\nu(x, a) + A_2(\nu, x, a)\, K_2^\nu(x, a),$$

où les coefficients $A_1(\nu, x, a)$ et $A_2(\nu, x, a)$ sont des fonctions périodiques de ν, en ayant la période additive $+1$, mais étant quelconques du reste.

Introduisons maintenant, dans (17), les expressions de $K_1^\nu(x, a)$ et de $K_2^\nu(x, a)$ tirées des formules (14) et (15), il résulte finalement

$$(18)\quad y_\nu(x, a) = B(\nu, x, a)\, j^\nu(x, a) + B(\nu - 1, x, a)\, k^\nu(x, a),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(19)\quad B(\nu, x, a) = A_1(\nu, x, a)\, \alpha_1(\nu, a) + A_2(\nu, x, a)\, \alpha_2(\nu, a).$$

Cela posé, revenons à l'équation différentielle (3), son déterminant fonctionnel se présente dans la forme

$$k^\nu(x, a)\, k^{\nu-1}(x, a) - j^\nu(x, a)\, j^{\nu-1}(x, a) = K e^{-\frac{x^2}{4a}},$$

où K désigne une constante par rapport à x, dont la valeur est facile à déterminer.

En effet, posons $x = 0$, il résulte

$$K = -j^\nu(0, a)\, j^{\nu-1}(0, a) = -\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}{a^{-\frac{\nu}{2}} \cdot a^{\frac{1-\nu}{2}}},$$

d'où, en vertu d'une formule bien connue,

$$K = -2^{\nu+1} a^{\nu - \frac{1}{2}} \sqrt{\pi}\, \Gamma(-\nu) = \frac{(2a)^{\nu-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\nu+1) \sin \nu\pi},$$

ce qui donnera finalement

$$(20)\quad k^\nu(x, a)\, k^{\nu-1}(x, a) - j^\nu(x, a)\, j^{\nu-1}(x, a) = \frac{(2a)^{\nu-\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\nu+1) \sin \nu\pi} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a}},$$

où nous supposons naturellement que le paramètre ν ne soit pas égal à un nombre entier, cas particulier que nous avons à étudier dans le paragraphe suivant.

Pour développer une autre propriété fondamentale des deux transcendantes entières de x $j^\nu(x, a)$ et $k^\nu(x, a)$, nous avons à étudier cette autre équation différentielle

$$2ay'' - xy' - \nu y = 0, \tag{21}$$

qui a évidemment les deux intégrales particulières

$$y_1 = j^{-\nu}(x, a), \quad y_2 = k^{-\nu}(x, a). \tag{22}$$

Appliquons ensuite la transformation

$$y = e^{\frac{x^2}{4a}} \cdot z,$$

un simple calcul donnera, en vertu de (21),

$$2az'' + xz' - (\nu - 1)z = 0, \tag{23}$$

d'où, en posant $-a$ au lieu de a,

$$2az'' - xz' + (\nu - 1)z = 0;$$

c'est-à-dire que l'équation différentielle (23) a ces deux intégrales particulières

$$z_1 = j^{\nu-1}(x, -a), \quad z_2 = k^{\nu-1}(x, -a). \tag{24}$$

Cela posé, la forme même des quatre intégrales particulières en question donnera immédiatement des identités de la forme

$$e^{-\frac{x^2}{4a}} j^{\nu}(x, a) = A j^{-\nu-1}(x, -a),$$

$$e^{-\frac{x^2}{4a}} k^{\nu}(x, a) = B k^{-\nu-1}(x, -a),$$

où A et B sont des constantes par rapport à x, qui sont faciles à déterminer.

En effet, posons $x = 0$, nous aurons, en vertu de (6) et (7),

$$\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) a^{\frac{\nu}{2}} = A\,\Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)(-a)^{-\frac{\nu+1}{2}},$$

$$\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) a^{\frac{\nu-1}{2}} = B\,\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)(-a)^{-\frac{\nu}{2}-1};$$

posons ensuite généralement

$$(-1)^{\rho} = e^{\rho\pi i},$$

puis appliquons les formules

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}\,,$$

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)2^{x-1} = \sqrt{\pi}\,\Gamma(x)\,,$$

il résulte finalement

$$e^{-\frac{x^2}{4a}}\,j^{\nu}(x, a) = \frac{e^{\frac{\nu-1}{2}\pi i}(2a)^{\nu}\sqrt{\pi a}}{\Gamma(\nu+1)\sin\frac{\nu\pi}{2}} \cdot j^{-\nu-1}(x, -a)\,, \tag{25}$$

$$e^{-\frac{x^2}{4a}}k^{\nu}(x, a) = \frac{a^{\frac{\nu\pi i}{2}}(2a)^{\nu}\sqrt{\pi a}}{\Gamma(\nu+1)\cos\frac{\nu\pi}{2}} \cdot k^{-\nu-1}(x, -a). \tag{26}$$

Dans le paragraphe suivant nous avons à étudier plus amplement le cas particulier exclu, où ν est supposé égal à un nombre entier.

§ 16. Les fonctions d'Hermite de seconde espèce.

Les deux équations fonctionnelles

$$D_x H_n(x, a) = H_{n-1}(x, a)\,,$$
$$nH_n(x, a) = xH_{n-1}(x, a) - 2a H_{n-2}(x, a)$$

que nous avons prises comme définition des polynomes d'Hermite, combinées par les deux valeurs initiales

$$H_0(x, a) = 1\,,\quad H_1(x, a) = x\,,$$

montrent clairement que le polynome

$$y = H_n(x, a)$$

est intégrale particulière de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

$$2ay'' - xy' + ny = 0\,, \tag{1}$$

savoir le cas spécial exclu de l'équation générale (3) du paragraphe 15, ce qui nous conduira à représenter les $H_n(x, a)$ comme des valeurs limites des $j^{\nu}(x, a)$ et des $k^{\nu}(x, a)$.

Nous trouvons immédiatement

$$(2)\qquad \lim_{\nu=2n} \frac{\sin\frac{\nu\pi}{2}}{\pi} j^{\nu}(x, a) = (-1)^{n-1} H_{2n}(x, a),$$

$$(3)\qquad \lim_{\nu=2n+1} \frac{\cos\frac{\nu\pi}{2}}{\pi} k^{\nu}(x, a) = (-1)^{n} H_{2n+1}(x, a).$$

Quant à la seconde intégrale particulière de (1), posons

$$(4)\qquad \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot k^{2n}(x, a) = h_{2n}(x, a),$$

$$(5)\qquad \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cdot j^{2n+1}(x, a) = h_{2n+1}(x, a),$$

nous aurons les séries de puissances toujours convergentes

$$(6)\qquad h_{2n}(x, a) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(s-n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot a^{s-n}} \cdot \frac{x^{2s+1}}{(2s+1)!},$$

$$(7)\qquad h_{2n+1}(x, a) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\Gamma\left(s-n-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot a^{s-n-1}} \cdot \frac{x^{2s}}{(2s)!},$$

et il saute aux yeux que les coefficients numériques de ces deux séries de puissances sont des nombres rationnels.

Dans ce qui suit nous désignons comme fonctions d'HERMITE de seconde espèce les transcendantes entières $h_n(x, a)$, ce qui est conforme aux définitions des fonctions sphériques de seconde espèce.

Il est évident que les fonctions d'HERMITE de seconde espèce satisfont à l'équation fonctionnelle

$$(8)\qquad D_x h_n(x, a) = h_{n-1}(x, a), \quad n \geqq 1;$$

c'est-à-dire que l'équation différentielle (1) se transforme en cette équation aux différences finies

$$(9)\qquad n h_n(x, a) = x h_{n-1}(x, a) - 2a h_{n-2}(x, a), \quad n \geqq 2,$$

analogue à celle connue pour les polynomes d'HERMITE.

Cela posé, les formules générales (3) et (4) du paragraphe 7 donnent pour les fonctions d'HERMITE de seconde espèce

$$(10)\quad \binom{n+p}{n} h_{n+p}(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{(-1)^s (2a)^s}{s!} H_{n-s}(x, a)\, h_{p-s}(x, a),$$

$$(11)\quad H_n(x, a)\, h_p(x, a) = \sum_{s=0}^{s=n} (2a)^s \binom{n+p-2s}{n-s} h_{n+p-2s}(x, a),$$

où il faut supposer $p \geqq n$; les cas les plus intéressants de ces formules, savoir $p = n$, $p = n+1$, sont évidents.

Quant au déterminant fonctionnel de l'équation différentielle (1), la formule (20) du paragraphe 15 donnera, en vertu des définitions (2), (3), (4), (5),

$$(12)\quad H_n(x, a)\, h_n'(x, a) - H_n'(x, a)\, h_n(x, a) = \frac{(2a)^n}{n!} \cdot e^{\frac{x^2}{4a}},$$

formule qui est applicable pour $n \geqq 0$; soit $n \geqq 1$, la formule en question se présente aussi dans cette autre forme

$$(13)\quad H_n(x, a)\, h_{n-1}(x, a) - H_{n-1}(x, a)\, h_n(x, a) = \frac{(2a)^n}{n!} \cdot e^{\frac{x^2}{4a}}.$$

Cela posé, il est évident que la formule (12) donnera pour $n = 0$

$$(14)\quad h_0'(x, a) = e^{\frac{x^2}{4a}},$$

de sorte que la fonction $h_0(x, a)$ n'est autre chose que la transcendante de KRAMP, savoir

$$(15)\quad h_0(x, a) = \int_0^x e^{\frac{x^2}{4a}} dx,$$

et il saute aux yeux, en vertu de (8), que la fonction générale de seconde espèce $h_n(x, a)$ peut être obtenue en intégrant n fois par rapport à x la transcendante de KRAMP.

Appliquons maintenant l'équation (13), nous aurons successivement, en posant $n = 1, 2, \ldots$, les expressions suivantes

$$h_1(x, a) = x h_0(x, a) - 2a e^{\frac{x^2}{4a}},$$

$$h_2(x, a) = \left(\frac{x^2}{2} - a\right) h_0(x, a) - a x e^{\frac{x^2}{4a}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui nous conduira à la formule générale

$$(16) \quad h_n(x, a) = H_n(x, a) \int_0^x e^{\frac{x^2}{4a}} dx - \frac{2a}{n!} G_{n-1}(x, a) e^{\frac{x^2}{4a}}, \quad n \geqq 1,$$

où les $G_n(x, a)$ sont les polynomes étudiés dans le paragraphe 8.

En effet, on voit immédiatement que la formule (16) est vraie pour $n = 1, 2, \dots$; introduisons ensuite dans (13) les expressions des trois fonctions du second espèce tirées de (16), nous trouvons précisément la formule (2) du paragraphe 8, savoir la définition des $G_n(x, a)$.

Il est évident que la formule (16) est analogue à celle qui exprime la fonction sphérique générale de seconde espèce.[1] On voit du reste que la formule (16) est entièrement différente de celle étudiée par LAGUERRE.[2]

Différentions maintenant par rapport à x la formule (16), puis appliquons les identités

$$D_x H_n(x, a) = H_{n-1}(x, a), \quad D_x h_n(x, a) = h_{n-1}(x, a),$$

il résulte

$$2a G'_{n-1}(x, a) + x G_n(x, a) = n! \, H_n(x, a) + 2an \, G_{n-2}(x, a),$$

d'où, en éliminant, en vertu de la formule (2) du paragraphe 8, savoir

$$H_{n-1}(x, a) \, G_{n-1}(x, a) = n H_n(x, a) \, G_{n-2}(x, a) + (2a)^{n-1},$$

la fonction G_{n-2}, il résulte pour $G_{n-1}(x, a)$ cette équation

[1] Voir par exemple HEINE, Handbuch der Kugelfunktionen, t. I, p. 141; Berlin 1878.

[2] Bulletin de la Société mathématique de France, t. 7, p. 12—16; 1879. Œuvres, t. I, p. 415—419.

différentielle et non-homogène du premier ordre

$$(17)\quad G'_{n-1}(x,a)+\left(\frac{x}{2a}-\frac{H_{n-1}(x,a)}{H_n(x,a)}\right)G_{n-1}(x,a)=\frac{n!}{2a}H_n(x,a)-\frac{(2a)^{n-1}}{H_n(x,a)}.$$

Or, cette équation différentielle qui est facile à intégrer ne donne aucune expression simple du polynome $G_n(x,a)$.

En effet, intégrons comme ordinairement l'équation en question, il résulte

$$(18)\quad G_n(x,a)=e^{-\frac{x^2}{4a}}H_n(x,a)\left(\frac{n!}{2a}\int_0^x e^{\frac{x^2}{4a}}dx-(2a)^{n-1}\int\frac{e^{\frac{x^2}{4a}}}{\left(H_n(x,a)\right)^2}dx\right).$$

Posons ensuite, dans l'équation différentielle (1),

$$y = H_n(x,a)\int z\,dx\,,$$

il résulte pour la fonction de seconde espèce

$$(19)\qquad h_n(x,a)=\frac{(2a)^n H_n(x,a)}{n!}\int\frac{e^{\frac{x^2}{4a}}}{\left(H_n(x,a)\right)^2}dx.$$

Décomposons maintenant la fraction

$$\frac{1}{\left(H_n(x,a)\right)^2}\,,$$

puis intégrons par parties la seconde expression qui figure au second membre de (18), nous retrouvons, pour $G_{n-1}(x,a)$, l'expression curieuse indiquée dans la formule (12) du paragraphe 9.

Revenons maintenant à l'équation différentielle d'Hermite, savoir l'équation (1) du paragraphe présent, puis différentions $(n+p)$ fois par rapport à x, il résulte

$$(20)\qquad 2az''-xz'-pz=0\,,\quad p\geqq 0\,,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(21)\qquad z=y^{(n+p)}.$$

Or, l'équation différentielle ainsi obtenue étant de la même forme que l'équation (21) du paragraphe 15, nous avons dès à présent ces deux intégrales particulières

$$z_1 = e^{\frac{x^2}{4a}} H_{p-1}(x, -a)\,, \quad z_2 = e^{\frac{x^2}{4a}} h_{p-1}(x, -a)\,,$$

ce qui donnera une identité de la forme

$$D_x^{n+p+1} h_n(x, a) = D_x^p e^{\frac{x^2}{4a}} = K e^{\frac{x^2}{4a}} H_p(x, -a)\,,$$

où K est une constante; c'est-à-dire que nous venons de retrouver la formule différentielle d'HERMITE (4) du paragraphe 10.

§ 17. Sur une intégrale définie.

Supposons que la variable x ne soit pas réelle, puis supposons

(1) $$\Re(a) > 0\,,$$

il est évident que l'intégrale définie

(2) $$z^{\nu}(x, a) = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} (x-t)^{\nu}\, dt$$

a un sens quel que soit l'exposant ν, tandis que l'existence de la fonction $z^{\nu}(x, a)$ exige que ν ne soit pas égal à un négatif entier.

Supposons encore

(3) $$\Re(\nu) > -1\,,$$

il est évident que l'intégrale en question existe aussi pour des valeurs réelles de x.

Revenons maintenant au cas général, où la variable x n'est pas supposée réelle, il est évident que la fonction $z^{\nu}(x, a)$ satisfait à l'équation fonctionnelle

(4) $$D_x z^{\nu}(x, a) = z^{\nu-1}(x, a).$$

De plus, l'identité évidente

$$(x-t)^{\nu} = x(x-t)^{\nu-1} - t(x-t)^{\nu-1}$$

donnera

$$\nu z^{\nu}(x, a) = x D_x z^{\nu}(x, a) - \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} (x-t)^{\nu-1} z\, dt\,,$$

de sorte que nous aurons, en intégrant par parties, pour le fonction

$$z = z^{\nu}(x, a)$$

cette équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

(5) $$2a z'' + x z' - \nu z = 0 ,$$

obtenue de l'équation (3) du paragraphe 15 en y changeant le signe de a.

Remarquons maintenant que la fonction $z^{\nu}(x, a)$ satisfait à la condition (4), il résulte par conséquent une expression de la forme

(6) $$z^{\nu}(x, a) = \alpha(\nu, a)\, j^{\nu}(x, -a) + \alpha(\nu-1, a)\, k^{\nu}(x, -a),$$

où $\alpha(\nu, a)$ désigne une fonction périodique de ν, en ayant la période additive $+2$, savoir

$$\alpha(\nu+2, a) = \alpha(\nu, a).$$

Quant à la détermination de $\alpha(\nu, a)$, posons dans (6) $x=0$, il résulte

(7) $$z^{\nu}(0, a) = \alpha(\nu, a)\, j^{\nu}(0, -a).$$

Posons ensuite pour fixer les idées

$$(-1)^{\rho} = e^{\pi \rho i},$$

la formule (7) donnera, en vertu de (2),

$$\alpha(\nu, a)\, \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) a^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} (-t)^{\nu}\, dt,$$

ou bien, après une légère transformation,

$$\alpha(\nu, a)\, \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) a^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{\nu\pi i}{2}} = \frac{1+e^{\nu\pi i}}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} t^{\nu}\, dt ,$$

ce qui donnera, en vertu de la formule intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} t^{\nu}\, dt = 2^{\nu} a^{\frac{\nu+1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right), \quad \Re(\nu) > -1 ,$$

bien connue de la théorie de la fonction gamma,

$$\alpha(\nu, a)\, \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) = \frac{2^{\nu+1} a^{\frac{1}{2}}\, \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \cos\frac{\nu\pi}{2}}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Appliquons ensuite les identités

$$\sqrt{\pi}\, \Gamma(\nu+1) = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}+1\right) 2^{\nu},$$

$$\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) = -\frac{\pi}{\sin\frac{\nu\pi}{2}},$$

il résulte

$$\alpha(\nu, a) = -\sqrt{\frac{a}{\pi}} \sin\nu\pi,$$

ce qui donnera finalement

$$(8) \qquad \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} (x-t)^{\nu} dt = \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sin\nu\pi \left(k^{\nu}(x, -a) - j^{\nu}(x, -a)\right).$$

Soit particulièrement ν égal à un entier non négatif, savoir

$$\nu = n,$$

il résulte, en vertu des formules (2) et (3) du paragraphe précédent,

$$(9) \qquad H_n(x, -a) = \frac{1}{n!} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4a}} (x-t)^n dt,$$

formule qui est applicable pour une valeur quelconque de la variable x.

Revenons maintenant à la formule générale (8), puis introduisons $-\nu$ à la place de ν, il résulte après une légère modification

$$(10) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{4a}}}{(t-x)^{\nu}} dt = \frac{e^{-\nu\pi i}}{\Gamma(\nu)} \sqrt{\frac{a}{\pi}} \left(j^{-\nu}(x, -a) - k^{-\nu}(x, -a)\right).$$

Cela posé, nous avons à étudier l'intégrale définie

$$(11) \qquad K_n(x, a) = \frac{n!}{(2a)^n \sqrt{4\pi a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_n(t, a)\, e^{-\frac{t^2}{4a}}}{x-t} dt,$$

où la variable x ne doit jamais être réelle; la formule récursive (2) du paragraphe 11 donnera immédiatement

$$(12) \qquad K_n(x, a) = \frac{n!}{\sqrt{4\pi a}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{t^2}{4a}} dt}{(x-t)^{n+1}},$$

d'où, en vertu de (10),

$$(13) \qquad K_n(x, a) = \frac{1}{2\pi}\left(j^{-n-1}(x, -a) - k^{-n-1}(x, -a)\right).$$

La formule (12) nous fournit un simple moyen pour développer en série asymptotique la fonction $K_n(x, a)$.

A cet effet, prenons pour point de départ l'identité évidente

$$\frac{1}{x-t} = \frac{1}{x} + \frac{t}{x^2} + \frac{t^2}{x^3} + \ldots + \frac{t^{r-1}}{x^r} + \frac{t^r}{x^r(x-t)};$$

différentions ensuite n fois par rapport à t, un simple calcul donnera cette autre identité

$$(14) \quad \frac{1}{(x-t)^{n+1}} = \sum_{s=0}^{s=r-n-1}\binom{n+s}{s}\frac{t^s}{x^{n+s+1}} + \frac{1}{x^r}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\binom{r}{n-s}\frac{t^{r-n+s}}{(x-t)^{s+1}}.$$

Posons ensuite dans (14) $m = n+r$, puis introduisons dans (12) l'expression ainsi obtenue, il résulte, en vertu des formules intégrales que nous venons d'appliquer,

$$(15) \qquad K_n(x, a) = \sum_{s=0}^{\leq\frac{m-1}{2}} \frac{(n+2s)!\, a^s}{s!\, x^{n+2s+1}} + R_m(x),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(16) \quad R_m(x) = \frac{n!}{x^{m+n}\sqrt{4\pi a}} \cdot \sum_{s=0}^{s=n}\binom{m-n}{n-s}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{4a}}\, t^{m+s}}{(x-t)^{s+1}}dt;$$

c'est-à-dire que nous avons tout d'abord à étudier une intégrale de la forme

$$(17)\quad I_{p,q}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{t^2}{4a}}\,t^p}{(x-t)^q}\,dt=\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{4a}}\left(\frac{1}{(x-t)^q}+\frac{(-1)^p}{(x+t)^q}\right)t^p\,dt\,,$$

où p et q sont des positifs entiers, tandis que la variable x ne doit jamais être réelle.

A cet effet, posons tout d'abord

$$a=\alpha+i\beta\,,\ \alpha>0\,,$$

il résulte

$$(18)\qquad \left|e^{-\frac{t^2}{4a}}\right|=e^{-\frac{t^2\alpha}{4(\alpha^2+\beta^2)}}\leqq e^{-\frac{t^2}{|4a|}}\,;$$

posons ensuite

$$x=\rho e^{i\theta},\quad \theta \neq p\pi\,,$$

nous aurons

$$|x-t|^2=t^2+\rho^2-2t\rho\cos\theta=(t+\rho)^2-4\rho t\cos^2\frac{\theta}{2}\,,$$

de sorte que l'inégalité évidente

$$(t+\rho)^2\geqq 4\rho t$$

donnera immédiatement

$$|x-t|^2\geqq(t+\rho)^2\sin^2\frac{\theta}{2}\geqq\rho^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,.$$

Remplaçons ensuite, dans l'inégalité que nous venons d'obtenir, x par $-x$, savoir θ par $\theta\pm\pi$, nous aurons de même

$$|x+t|^2\geqq\rho^2\cos^2\frac{\theta}{2}\,.$$

Cela posé, il résulte, en vertu de (17) et (18),

$$|I_{p,q}|<\frac{1}{\rho^q}\left(\frac{1}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^q}+\frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^q}\right)\cdot\int_0^{\infty}e^{-\frac{t^2}{|4a|}}t^p\,dt\,,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(19)\quad |I_{p,q}|<\frac{2^p}{\rho^q}\left(\frac{1}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|^q}+\frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^q}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\cdot|a|^{\frac{p+1}{2}}\,.$$

Remarquons maintenant que la formule (16) donnera

$$|R_m(x)| \leq \frac{n!}{\rho^{m+n}|\sqrt{4\pi a}|} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \binom{m-n}{n-s} |I_{m+s,\, s+1}|,$$

nous aurons évidemment

$$|R_m(x)| < \frac{n!\,(1+\varepsilon)}{\rho^{m+n}|\sqrt{4\pi a}|} \binom{m}{n} |I_{m,1}|,$$

où ε désigne une quantité positive qui s'évanouira quand nous faisons croître au delà de toute limite $\rho = |x|$.

Appliquons ensuite la formule (19), il résulte finalement

$$(20) \quad |R_m(x)| < \frac{m!\,(1+\varepsilon)\,2^{m-1}}{\rho^{m+n+1}\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|} + \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|} \right) \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) |a|^{\frac{m}{2}};$$

c'est-à-dire que nous venons de démontrer le théorème suivant :

I. Supposons que la variable x ne soit pas réelle, nous aurons la série asymptotique

$$(21) \qquad K_n(x, a) \sim \sum_{s=0}^{\leq \frac{m-1}{2}} \frac{(n+2s)!\, a^s}{s!\, x^{n+2s+1}}, \qquad \Re(a) > 0,$$

dont le terme de reste est déterminé à l'aide de la formule (20).

Il saute aux yeux que la formule (20) donnera immédiatement cet autre théorème :

II. Supposons

$$(22) \qquad x = |x| e^{i\theta}, \quad \pi - \alpha \geq |\theta| > \alpha > 0, \quad \Re(a) > 0,$$

la fonction transcendante $K_n(x, a)$ convergera, quel que soit l'indice n, uniformément à zéro quand nous faisons croître au delà de toute limite $|x|$.

Posons maintenant, d'un point de vue formel, sans question sur la convergence,

$$(23) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n(y, a)\, H_n(x, a),$$

puis appliquons formellement la formule (9) du paragraphe 11, nous verrons que $K_n(y, a)$ se détermine à l'aide de la formule intégrale obtenue de (11) en posant y à la place de x; c'est-à-dire que le coefficient $K_n(y, a)$ est défini, pourvu que y ne soit pas réel.

Appliquons ensuite la formule (11) du paragraphe 13, nous trouvons la série divergente

$$K_n(y, a) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a^s}{s!\, y^{n+2s+1}}, \tag{24}$$

obtenue de la série asymptotique (21) en y faisant croître au delà de toute limite m, puis remplaçant x par y; c'est-à-dire qu'un développement de la forme (23) n'existe pas.

Cela posé, il est évident que la méthode classique, inventée par CH. NEUMANN, et appliquée par l'illustre géomètre pour développer une fonction analytique en séries des fonctions sphériques ou des fonctions cylindriques, n'est pas applicable dans les recherches sur la possibilité de développer une fonction analytique en série de polynomes d'HERMITE.

§ 18. Sur le produit de deux fonctions d'Hermite.

Soient y et z des intégrales quelconques des équations différentielles d'HERMITE

$$y'' - \frac{x}{2a} y' + \frac{\mu}{2a} y = 0, \quad z'' - \frac{x}{2a} z' + \frac{\nu}{2a} z = 0, \tag{1}$$

nous avons à étudier le produit

$$u = yz.$$

A cet effet, nous aurons en différentiant deux fois par rapport à x

$$u'' = y''z + z''y + 2y'z',$$

d'où, en vertu de (1),

$$u'' - \frac{x}{2a} u' + \frac{\mu + \nu}{2a} u = 2y'z'. \tag{2}$$

Différentions encore une fois par rapport à x cette dernière identité, le même procédé donnera

$$u^{(3)} - \frac{x}{2a} u'' + \frac{3\mu + \nu - 1}{2a} u' = \frac{2x}{a} y'z' + \frac{\mu - \nu}{a} y'z ,$$

d'où en éliminant, à l'aide de (2), le produit $y'z'$

$$u^{(3)} - \frac{3x}{2a} u'' + \left(\frac{3\mu + \nu - 1}{2a} + \frac{x^2}{2a^2}\right) u' - \frac{(\mu + \nu) x}{2a^2} u = \frac{\mu - \nu}{a} y'z. \tag{3}$$

Soit particulièrement $\mu = \nu$, nous aurons par conséquent le théorème suivant:

I. Le produit de deux intégrales quelconques de l'équation différentielle

$$2ay'' - xy' + \mu y = 0$$

est toujours intégrale de cette équation différentielle homogène et linéaire du troisième ordre

$$2a^2 u''' - 3ax u'' + \left(x^2 + a(4\mu - 1)\right) u' - 2\mu x u = 0. \tag{4}$$

Quant au cas général, où μ et ν sont différents entre eux, nous avons à différentier encore une fois par rapport à x l'identité (3), ce qui donnera, en vertu de (1),

$$u^{(4)} - \frac{3x}{2a} u^{(3)} + \left(\frac{3\mu + \nu - 4}{2a} + \frac{x^2}{2a^2}\right) u'' - \frac{\mu + \nu - 2}{2a^2} xu' +$$
$$+ \frac{\mu(\mu - \nu) - (\mu + \nu)}{2a^2} u = \frac{(\mu - \nu) x}{2a^2} y'z + \frac{\mu - \nu}{a} y'z'.$$

Éliminons ensuite, en vertu de (2) et (3), les deux produits $y'z'$ et $y'z$, il résulte cet autre théorème:

II. Soient y et z des intégrales quelconques des équations (1), le produit

$$u = yz$$

est toujours intégrale de cette équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre

$$(5)\begin{cases} 4a^3 u^{(4)} - 8a^2 x u^{(3)} + \left(5x^2 + 4a(\mu + \nu - 2)\right) u'' - \\ - \left((6\mu + 4\nu - 6)\, ax + x^3\right) u' + \left(\left((\mu - \nu)^2 - 2(\mu + \nu)\right) a + (\mu + \nu) x^2\right) u = 0. \end{cases}$$

On voit que ces résultats obtenus pour le produit de deux fonctions d'Hermite sont parfaitement analogues à ceux connus pour le produit de deux fonctions métasphériques.

TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA

Page 7, ligne 4, trancendantes, lisez transcendantes
» 11, » 17, Appel, lisez Appell
» 20, » 3, ajoutez $-\sum_{s=n}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(2\pi x)^{2s}}{(2s)!}$
ibid., » 17, ajoutez $-\sum_{s=n}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(2\pi x)^{2s+1}}{(2s+1)!}$

Forelagt paa Mødet d. 19. Okt. 1917.
Færdig fra Trykkeriet d. 3. Maj 1918.